INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Birigui

Licenciatura em Matemática

Jorge Carlos Barrio Garcia

Introdução à Pesquisa Operacional

Birigui-SP
2014

Jorge Carlos Barrio Garcia

Introdução à Pesquisa Operacional

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Birigui, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Régis Leandro Braguim Stábile

Birigui
2014

Garcia, Jorge Carlos Barrio.

Introdução à Pesquisa Operacional / Jorge Carlos Barrio Garcia. – Birigui, 2014.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciado em Matemática) – Instituto Federal de São Paulo, Campus Birigui.

Orientadores: Prof. Dr. Regis Leandro Braguim Stábile.

1. Pesquisa Operacional. 2. Programação Linear. 3. Simplex I. Stábile, Regis Leandro Braguim. II. Instituto Federal de São Paulo, Campus Birigui.
III. Título.

Jorge Carlos Barrio Garcia

Introdução à Pesquisa Operacional

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Birigui, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Comissão examinadora

____

Prof. Dr. Regis Leandro Braguim Stábile, IFSP.

____

Profa. Dra. Eliana Contharteze Grigoletto, IFSP.

____

Profa. Ma. Manuella Aparecida Felix de Lima, IFSP.

Birigui, 09 de dezembro de 2014.

RESUMO

A Pesquisa Operacional é uma ciência aplicada que objetiva a resolução de problemas reais pautados na tomada de decisões, visando avaliar linhas de ações alternativas e então encontrar as soluções que melhor sirvam aos objetivos pretendidos.

Neste trabalho, propomos o estudo de problemas da Pesquisa Operacional, modelando-os matematicamente e abordando técnicas que nos permitam buscar e encontrar a melhor solução para tais problemas.

Palavras-chave: Pesquisa operacional. Simplex. Equações Lineares. Programação linear.

ABSTRACT

Operations Research is an applied science that aims to real problem solving guided in decision making, to evaluate lines of alternative actions and then find the solutions that best serve the intended purpose.

In this paper, we propose the study of the Operations Research problems, modeling them mathematically and addressing techniques that allow us to seek and find the best solution for such problems.

Keywords: Operational Research. Simplex. Linear Equations. Linear programming.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao Supremo Matemático, Todo Poderoso e Senhor meu Deus, à minha amada e dedicada esposa Kely e filhos adoráveis Jéssica, Jean e Rafael, que de um modo ou de outro sempre estiveram ao meu lado me sustentando e incentivando.

AGRADECIMENTOS

Toda honra e glória seja dada a Deus pela compreensão dada a mim deste mundo através da matemática, pela oportunidade concedida e por ter me sustentado quando eu mais precisei pela fé que tenho NELE.

À minha esposa Kely, meus filhos, Jessica, Jean e Rafael e a toda minha família em Cristo que, com muita oração, carinho, incentivo e paciência não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Ao meu orientador, Régis Leandro Braguim Stábile, pela dedicada e brilhante condução deste trabalho e por acreditar no meu potencial e que sem sombra de dúvida merece minha admiração. Às professoras Manuella, Ana Paula, Lidiane, Gislaine e Zionice e professores Régis, Deidimar, Roberto Bíscaro e Luiz Fernando que com um brilho no olhar nos moldaram professores de matemática. E a todos os professores do curso, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e na conclusão deste curso.

Aos meus amigos Marco Rogerio, Anderson, Alessandro, Adriano, Rosânia pelas conversas, risadas, viagens e trabalhos que fizemos juntos; foi sem dúvida uma das melhores épocas da minha vida, graças em grande parte a vocês que viram nascer este sonho e que agora podemos comemorar.

À MAT111N turma de 2011 de Licenciatura em Matemática, em especial aos que ficaram até aqui comigo Derson, Fabão, Bruno, Flavio, Xandão, Cris, Thays, Gislaine, Karin, Dumal, Maria Angélica, Priscila e Miriam os quais levarei no coração. Agradeço a companhia de todos em cada aula dada, em cada problema resolvido e em cada risada dada. Sentirei saudades e espero que nos encontremos numa nova etapa de nossas vidas.

Aos meus pais que me amaram e me educaram e graças a eles estou aqui neste ponto da vida honrando-os com meu trabalho, minha vida, minha história.

E enfim a todas as pessoas que um dia estiveram em meu caminho, partilhando de momentos únicos com conversas, incentivos, críticas e elogios, pois com certeza me fizeram repensar o caminho para este momento de finalização de um projeto de vida.

Educa a criança no caminho em que deve andar; e até quando envelhecer não se desviará dele.
Provérbios 22:6

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde a revolução industrial, onde o homem moderno entendeu que na divisão do trabalho e na segmentação das responsabilidades gerenciais o crescimento poderia ser exponencial, podemos presenciar a transformação de simples artesãos em grandes corporações complexas e bilionárias. Assim como houve crescimento das empresas, por consequência cresceram também os problemas. Assim também percebeu HILLIER Frederick S. (2006, pg.1) "... há uma tendência de as diversas unidades de uma organização crescerem em ilhas relativamente autônomas com seus próprios objetivos e sistemas de valor...", e é nesse momento que vemos as primeiras tentativas do tratamento cientifico para solucionar estes problemas. Podemos verificar isso com o estudo da determinação do ponto de equilíbrio de A. A. Cournot, que origina o lucro máximo, a tentativa de Quesnay modelizar a economia, o Sistema de Equilíbrio Geral de Walras que procurava da melhor forma interpretar a economia de forma única, a publicação de Von Neumann intitulada A Model of General Economic Equilibrium onde formula um modelo de programação linear dinâmica, em que admite métodos alternativos de produção simples ou conjunta e por fim a formulação de Kantorovich de um problema de programação linear no trabalho Métodos Matemáticos de Organização e Planejamento da Produção.

Mas todos estes, são indícios da Pesquisa Operacional, que daqui a partir daqui chamaremos de PO. O grande avanço em direção ao progresso foi na 2° guerra mundial (1939-1945). Em razão do empreendimento da guerra havia uma necessidade preeminente de se alocar recursos de forma eficiente nas diversas operações militares. Assim, o comando britânico e norte americano decidiram reunir cientistas e técnicos de várias áreas para compor uma equipe para estudar problemas estratégicos e táticos, eram matemáticos, físicos, engenheiros, agrimensores, neurologistas, estatísticos e até médicos. Esses cientistas não faziam guerra, mas devido ao notório saber que possuíam foram convocados para fazer pesquisa com fundamentos científicos dando um tratamento diferente aos problemas que lhes foram sendo colocados, orientando as ações militares. Desenvolveram então a ideia de criar modelos matemáticos, apoiados em dados e fatos, que lhes permitissem perceber os problemas em estudo e simular e avaliar o resultado hipotético de estratégias ou decisões alternativas. Essas equipes tiveram notável sucesso em suas sugestões, que eram criativas e eficazes e isso se deve à visão abstrata e conceitual que tinham. Um clássico deste método foi às balas incandescentes dos canhões antiaéreos em que as suas trajetórias eram filmadas e corrigidas.

Alguns resultados deste trabalho descreve CANTÃO & STARK (2010, pg. 4) “... foi o estudo do radar (inventado em 1934 pela Inglaterra), estudos para melhorar a manutenção e inspeção de aviões, a escolha dos melhores aviões para cada tipo de missão e no aumento de alvejar um submarino.” Assim como os celulares, microondas e outras tecnologias utilizadas na guerra e posteriormente reutilizadas pela sociedade, para a PO aconteceria o mesmo. A sua nova metodologia de abordagem dos problemas deram a PO volumoso crédito, por isso acabaram transferindo-as para as indústrias. Isso se deu devido a um projeto chamado SCCOP (Scientific Computation of Optimal Programs) que tinha por objetivo a gestão militar e que contava com o matemático George Dantzig. Durante o projeto, George, desenvolveu uma das técnicas mais importantes de resolução de problemas envolvendo otimização linear, tornando assim a primeira técnica explicita.

Posteriormente foram fundadas sociedades científicas devido ao uso da técnica ser tão difundida e usada, tanto pela iniciativa privada quanto da publica ao redor do mundo. Temos então a ORSA (EUA), IFOR (Ásia do Pacifico, Europa, América do Norte e do Sul), APDIO (Portugal), ALIO (Ibero Latina), APORS (Ásia do Pacífico), EPIO (Argentina), EURO (Europa), NORAM (EUA) e a brasileira SOBRAPO. A Sociedade brasileira foi fundada em 1969, na mesma década quando se discutia as questões educacionais envolvendo a PO nas universidades fora do Brasil, tornando-a assim grade curricular chamada programação matemática.

A fundação da SOBRAPO (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional) se dera um ano depois do I Simpósio de Pesquisa Operacional, realizado no ITA, em São José dos Campos, SP, desde então, tem reunido a grande maioria dos profissionais da PO no Brasil, presentes nas universidades, empresas e órgãos públicos, sejam eles federais, estaduais ou municipais. A SOBRAPO mantem publicações internacionais na IFORS (International Federation of Operational Research Societies) e ALIO (Associacion Latino-Ibero-Americana de Investigacion Operativa), que mantém contato com o mundo em geral, ajudando a divulgar em congressos e revistas a produção científica dos pesquisadores brasileiros.

Em alguns países, em que prevaleceu a preocupação com os fundamentos teóricos, a Pesquisa Operacional se desenvolveu sob o nome de Ciência da Gestão ou Ciência da Decisão e em outros, em que predominou a ênfase nas aplicações, com o nome de Engenharia Industrial ou Engenharia de Produção.

O desenvolvimento da técnica foi extraordinário a ponto de termos outras técnicas que se deram a partir da PO, que podemos citar como teoria dos jogos, teoria das filas, teoria dos grafos, programação linear, programação dinâmica, analise estatística e cálculo da probabilidade. Hoje, o avanço nesta área é crescente devido a processadores cada vez mais rápidos e potentes, trabalhando um número cada vez maior de dados, não apenas das empresas, mas, também de instituições do setor público, dentro e fora da área econômica. Pelo seu caráter multidisciplinar, a PO é uma disciplina científica de características horizontais com suas contribuições estendendo-se por praticamente todos os domínios da atividade humana, da Engenharia à Medicina, passando pela Economia e a Gestão Empresarial.

Encontramos em vários textos, inúmeras definições para a PO, mas endosso aqui a de Nélio Pizzolato e André Gandolpho, que a descrevem com plenitude. “Grupo de técnicas desenvolvidas para aplicar ferramentas e métodos científicos para resolver problemas de tomada de decisão em organizações e sistemas complexos. Pesquisa Operacional busca soluções ótimas em situações de objetivos conflitantes e faz uso de modelos matemáticos a partir dos quais soluções para problemas reais podem ser derivadas”.

O uso de modelos para a resolução de problemas faz parte da essência dos que usam a PO. Partimos do principio de que se o problema for simples é bom usar a intuição, o saber comum e até mesmo a experiência. Mas se for um problema daqueles que desafiam a criatividade humana, há certos momentos em que o retorno financeiro banca a contratação de uma equipe para um projeto de pesquisa operacional.

A execução do projeto passa por algumas fases. Vejamos o infográfico:

Figura 1- Fluxograma.

São cinco fases bem definidas, que segue a descrição:

i. Identificação do problema – Para se identificar bem o problema podemos buscar resposta das seguintes questões:
   a) Quem tomará as decisões;
   b) Quais são os objetivos;
   c) Quais aspectos estão sujeitos ao controle (variáveis de decisão);
   d) Quais limitações são essas variáveis (restrições);
   e) Quais aspectos que estão envolvidos no processo e que fogem ao controle.

ii. Construção do modelo – são representações da realidade. Os modelos podem ser icônicos, físicos, analógicos e matemáticos. Um modelo matemático é representado por expressões matemáticas que expressam a essência do problema.

iii. Obtenção da solução – Os métodos são diversos, como já citados anteriormente, tais como Programação Linear, Teoria das Filas, Teoria dos Grafos, Programação em redes. E para isso foram desenvolvidos vários software que se pode usar, como exemplos temos Solver Excel®, LINDO® (Linear Discrete Optimizer), CPLEX®, PROMODEL®, ARENA®.

iv. Teste do modelo e da solução – Devido à complexidade dos problemas e até mesmo a obtenção errônea de dados ou de informações, existe a possibilidade, devido a distorções, de se obter uma solução que não corresponda à realidade. Por isso que existe esta etapa do processo, exatamente para testar e validar a solução.

v. Implementação – Esta fase é critica e é nesse momento que o resultado dos estudos será obtido. Apesar do uso do computador os técnicos devem ter um aspecto pessoal na implementação devido ao estreito relacionamento que estes têm com as informações e dados.

CAPÍTULO 1: PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo, introduziremos alguns conceitos básicos da álgebra matricial que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Assim, a revisão a seguir trata de conceitos do ponto vista da programação linear.

1.1 Sistemas de Equações Lineares

Um sistema linear é o conjunto de *m* equações lineares, $m \geq 1$, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, como o descrito abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Tal sistema pode ser escrito na forma matricial A.X = B, onde:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \; \text{e} \; B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.1.1: Consideremos o sistema linear.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que este sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Solução de um Sistema de Equações Lineares

Ter uma solução para um sistema de equações lineares A.X = B é encontrar um vetor X = $(x_1,x_2,...,x_n)$ que satisfaça simultaneamente todas as equações do sistema.

Para um sistema linear, temos as seguintes alternativas de soluções:

i. Solução única – admite somente uma solução;
ii. Infinitas soluções – admite uma infinidade de soluções;
iii. Impossível – não tem nenhuma solução.

A saber, em uma matriz quadrada (*m*=*n*) basta que calculemos o determinante desta para sabermos informações sobre a existência de solução. Neste caso se o determinante (D) for:

i. D = 0, dizemos que o sistema possui infinitas soluções ou não possui solução;
ii. D ≠ 0, dizemos que o sistema é do tipo crameriano, portanto possui uma solução.

Quando o termo independente, de todas as equações, vale zero (B=0), diz que (X=0) só se D ≠ 0, se D=0, possui infinitas soluções. Dos sistemas homogêneos podemos definir:

i. Se a matriz for singular (não admite inversa) o sistema é indeterminado (D = 0);
ii. Se a matriz não for singular só existe a solução trivial (X = 0).

Por sua vez se uma matriz não é singular, sua inversa (A^{-1}) existe, e então a solução do sistema A.X=B é determinada como segue:

$$A.X=B \Rightarrow A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B \Rightarrow I.X=A^{-1}.B \Rightarrow X=A^{-1}.B \quad (1)$$

Exemplo 1.2.1:

Consideremos o sistema linear dado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Claramente D ≠ 0. Assim, calculando a inversa e procedendo como em (1), obtemos a solução:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/19 & 7/19 & 1/19 \\ -3/19 & -8/19 & 7/19 \\ -4/19 & 2/19 & 3/19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, a solução para o sistema é $x_1 = 2$; $x_2 = -3$ e $x_3 = 1$.

1.3 Método Gauss-Jordan

Tendo em vista que a resolução do sistema calculada pela matriz inversa nos traria um ônus devido ao excesso de calculo necessários para a determinação da mesma, iremos estudar o método que envolve um algoritmo mais rápido para as rotinas computacionais, o método Gauss-Jordan, que consiste na construção, por meio de operações elementares, de uma matriz unitária. As operações elementares consistem em:

i. Trocar duas equações do sistema de posições (linhas);
ii. Substituir uma equação pela mesma equação multiplicada por um escalar, não nula;
iii. Substituir uma equação pela mesma equação somada a outra equação multiplicada por um escalar.

Observemos o exemplo anterior:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Utilizando as operações elementares para resolução do sistema, devemos:

i. Dividir a 1ª linha por 2. Adicionar à 2ª linha a 1ª linha multiplicada por (-1). E adicionar à 3ª linha a 1ª vezes (-2), obtendo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2/2 - 3x_3/2 = -1 \\ \quad -3x_2/2 + 7x_3/2 = 8 \\ \quad x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

ii. Dividir a 2ª linha por (-3/2). Adicionar à 1ª linha a 2ª multiplicada por (-1/2). E adicionar a 3ª linha a 2ª vezes (-1), obtendo:

$$\begin{cases} x_1 - x_3/3 = 5/3 \\ x_2 - 7x_3/3 = -16/3 \\ 19/3\, x_3 = 19/3 \end{cases}$$

iii. Dividir a 3ª linha por 19/3, resultando $x_3 = 1$. Somar à 1ª linha a 3ª multiplicada por 1/3 e somar à 2ª linha a 3ª multiplicada por 7/3, obtendo:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Assim chegamos ao mesmo resultado previsto na resolução utilizando a matriz inversa, no entanto de maneira mais simples e rápida.

1.4 Soluções de Sistemas de Equações Lineares caso n>m

No processo de modelagem de problemas, devido à complexidade, encontra-se muitas vezes um número maior de variáveis do que de equações. No entanto, é possível obtermos a solução pelos métodos anteriormente discutidos para matrizes retangulares do tipo n > m. Vejamos como no próximo exemplo.

Exemplo 1.4.1:

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 11 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 2 \end{cases}$$

Para este sistema, e para todos os casos do tipo n>m, faremos algumas considerações, que se segue:

i. Notação matricial (AX=B) temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ii. O sistema tem cinco variáveis e duas equações, portanto tem infinitas soluções. Podemos arbitrar valores para 5-2=3 variáveis e definir solução para as outras duas restantes. Assim o sistema tem uma solução trivial chamada básica. Dado que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e $x_4 = 11/2$ e $x_5 = -2$ chegamos que x_1, x_2 e x_3 são variáveis não básicas e x_4 e x_5 são variáveis básicas.

iii. Variável básica é aquela responsável por uma equação na qual ela tem coeficiente 1 e enquanto nas outras equações tem coeficiente 0.

iv. Na forma matricial, um sistema que possui uma variável básica associada a cada equação chamamos de forma canônica.

v. Uma base B do sistema é dada pelo conjunto vetores coluna correspondente às variáveis básicas, no exemplo a coluna A_4 e A_5.

vi. Para sabermos a variedade de soluções básicas possíveis basta fazermos a permutação de:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

vii. As soluções triviais distintas, se existem, podem ser obtidas pelo processo de mudança de base.

1.5 Mudança de base

O pivoteamento consiste na sequência particular de operações elementares com linhas que substitui um sistema linear por outro equivalente no qual uma variável especificada tem o coeficiente unitário em uma equação e nulo nas restantes. Admitindo que a variável x_i seja básica e pertença a r-ézima linha do sistema, a ação de pivotear, tendo em vista a inserção de x_j no lugar consiste nos seguintes passos:

i. Dividir-se por a_{rj} a r-ézima equação de modo a se obter $a_{rj} = 1$ no sistema modificado;

ii. Adiciona-se a k-ézima equação, k = 1, 2,..., m, k ≠ r, $\frac{-a_{kj}}{a_{rj}} = \frac{-a_{kj}}{1} = -a_{kj}$, com o intuito de zerar o coeficiente de x_j nesta k-ézima linha.

Ilustremos com o exemplo abaixo:

Exemplo 1.5.1:

Considere o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & 2 \\ & x_2 & -2_3 & -x_4 & +x_5 & = & 2 \end{cases}$$

Substituindo-se x_1 por x_4 na base, obtemos $a_{11} = 1$ e então não precisamos fazer a divisão por a_{11}; da mesma maneira como a_{12} =1, basta somar à 1ª equação, a 2ª equação multiplicada por 2 e substitui-la na 1ª equação, obtendo:

$$\begin{cases} x_1 & & -3x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 6 \\ & x_2 & -2x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 2 \end{cases}$$

A mudança de base pode ser vista como uma multiplicação de matrizes. Para entender melhor tome como base a matriz A, do sistema linear AX = B e que possa ser escrita da forma **A = [B|N|I]**, sendo **B** a base atual **I** a base original e **N** os demais vetores, contendo as variáveis não básicas.

Seja $\mathbf{B^{-1}}$ a inversa da base atual, então podemos escrever:

$$B^{-1}.[B \mid N \mid I\,] = B^{-1}.b \Rightarrow [\,I \mid B^{-1}\ N\ \ B^{-1}\,]\ x = B^{-1}.b.$$

Se aplicarmos este conceito no exemplo 1.5.1

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \text{B} \qquad \text{N} \qquad \text{I}\end{array} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Trocando a base pelo pivoteamento, temos:

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \\ B^{-1}.B=I \quad B^{-1}.N \quad B^{-1}\end{array} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Portanto a base nova pode ser obtida por dois métodos, a saber, o método Gauss-Jordan e ou pelo método $\mathbf{B^{-1} \cdot Ax = B^{-1} \cdot b}$

1.6 Espaços vetoriais

Definição 1.6.1 Um espaço vetorial é uma estrutura algébrica formada por um conjunto V de elementos (vetores), uma operação de adição e uma de multiplicação de elementos de V por escalares, que satisfaz as seguintes propriedades.

i. Quaisquer que sejam u, v e w ∈ V : (u+v) +w = u+ (v+w).
ii. Existe 0 ∈ V tal que para todo v ∈ V: 0+v=v
iii. Para cada v ∈ V, existe −v ∈ V tal que: v+ (-v) =0
iv. Quaisquer que sejam u, v ∈ V, segue que: u+v=v+u
v. Para todo escalar k ∈ K e quaisquer v,w ∈ V: k.(v+w) =k.v+k.w
vi. Para quaisquer k,m ∈ K e todo v ∈ V: (k+m).v=k.v+m.v
vii. Para quaisquer k,m ∈ K e qualquer v ∈ V: (km).v=k(m.v)
viii. Para qualquer v ∈ V tem-se que: 1.v=v

Definição 1.6.2 Dados os vetores $A_1, A_2, A_3,..., A_n \in \mathbb{R}^n$ e $x_1, x_2, x_3,..., x_n \in \mathbb{R}$ podemos escrever o vetor **b** = $A_1.x_1+A_2.x_2+A_3.x_3+...+A_n.x_n$. Esta forma de escrever um vetor chama-se **combinação linear** dos vetores $A_1, A_2, A_3,..., A_n$. A partir daí podemos classificar a sequência de vetores $A_1, A_2, A_3,..., A_n$ em:

I. **Linearmente independentes** – Se a equação vetorial ($A_1.x_1+A_2.x_2+A_3.x_3+...+A_n.x_n$ =0), só for satisfeita para $x_1= x_2= x_3 =...= x_n=0$ então dizemos que os vetores são linearmente independente (LI).

II. **Linearmente dependentes** – Se a equação vetorial ($A_1.x_1+A_2.x_2+A_3.x_3+...+A_n.x_n$ =0), só for satisfeita para algum x_k com $k \in (1, 2, 3,..., n) \neq 0$ então dizemos que os vetores são linearmente dependente (LD).

Definição 1.6.3 Um espaço vetorial V tem dimensão m, se existem m vetores LI em V e não existem (m+1) vetores LI.

Definição 1.6.4 Dizemos que um conjunto B= $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ é uma base para um espaço vetorial V se $v_1, v_2,..., v_n$ é uma sequência linearmente independente e se todo vetor *u* de V, for escrito como combinação linear dos elementos de B, ou seja, se existem $y_1,y_2,...,y_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = y_1v_1+y_2v_2+...+y_mv_m$$

Neste caso, dizemos que os coeficientes $y_1, y_2,...,y_m$ são as coordenadas de u com respeito à base B.

Definição 1.6.5 Em uma matriz podemos considerar que as linhas ou as colunas são vetores. Chamamos posto de uma matriz ao número de linhas ou colunas linearmente independentes.

O número de linhas linearmente independentes coincide com o número de colunas linearmente independentes. O valor máximo do posto de uma matriz é menor que os números correspondentes ao número de linhas e colunas, ou seja, se uma matriz tem dimensão 3 x 5, o valor máximo que pode alcançar o posto desta matriz é 3 (pois 3 = mínimo {3, 5}).

Exemplo 1.6.1:

Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Empregando o conceito de vetores LI aos vetores coluna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E nos vetores linha:

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa equação vetorial fornece o sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Portanto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, logo a matriz tem posto = 3.

1.7 Base de uma matriz

Definição 1.7.1 - Se uma matriz A_{mxn}, com m<n, possui linhas (A_r, A_s,..., A_p), LI, então a matriz quadrada B = [A_r, A_s,..., A_p] de ordem m é uma base de A.

Considere uma base no espaço do $\mathbb{R}^m$ constituída pelos vetores e_1, e_2, e_3,..., e_m. Nessa base, qualquer vetor y é expresso por uma combinação linear sendo {y_1, y_2,..., y_m} as coordenadas do vetor y. Assim:

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + ...+ y_ke_k + ... + y_me_m$$

Mudando na base, o vetor e_k pelo y:

$$\mathbf{e}_k = -\frac{y_1}{y_k}\mathbf{e}_1 - \frac{y_2}{y_k}\mathbf{e}_2 - \cdots + \frac{1}{y_k}y_k\mathbf{y} - \cdots - \frac{y_m}{y_k}\mathbf{e}_m$$

Essa expressão mostra o vetor e_k expresso numa base constituída pelos vetores **y** e $\mathbf{e}_i$, elas são importantes para casos de mudança de base.

1.8 Conjuntos convexos e combinações convexas.

Definição 1.8.1 Um conjunto X de elementos de um espaço vetorial é convexo se, dados $x_1, x_2 \in X$, todos os pontos na forma $\alpha \cdot x_1 + (1-\alpha) \cdot x_2$, com $\alpha \in [0,1]$, pertencem também a X.

Conjunto convexo Conjunto não convexo

Figura 2 - Conjunto convexo e não convexo

Definição 1.8.2 Seja $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial linear ($\mathbb{R}$). Combinações lineares de elementos de S são formadas através de:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \text{, onde } a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}.$$

Se os escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, são tais que $a_i \geq 0$ ($i=1,2,...,n$) e $\sum_{i=1}^{n} . a_{i=}1$, então a combinação linear é chamada combinação convexa dos elementos $x_1, x_2, ..., x_n \in X$.

Definição 1.8.3 Sejam os vetores $A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Seja o vetor $b = \lambda . A_1 + (1- \lambda) A_2$ com $0<\lambda<1$ representando uma combinação convexa dos vetores. Se λ variar entre 0 e 1, o vetor b será representado dentro do segmento que une os pontos de A_1 e A_2.

Quaisquer pontos dentro de um segmento de reta formado por quaisquer dois pontos pertencem a ele. Para conjuntos convexos temos duas propriedades:

- A intersecção de conjuntos convexos também é um conjunto convexo.
- A soma ou subtração de dois conjuntos convexos também é um conjunto convexo.

Seja $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial linear.

CAPÍTULO 2: PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Traremos neste capítulo a formalização e modelagem de problemas de Programação Linear (PL) e alguns exemplos. Da mesma forma, abordaremos a solução gráfica para este tipo de problema. A forma padrão de um problema terá também uma abordagem significativa para o melhor entendimento do próximo capítulo que abordará o método simplex.

2.1 Formalização e modelagem de um problema

A PO tem por objetivo encontrar a melhor solução para problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares. A natureza destes problemas trata de recursos limitados e sua utilização criteriosa. Na prática tais recursos são usualmente de viés econômico, tais como capital, matéria-prima, mão-de-obra, equipamento, tempo e outros. A tarefa da PO é maximizar ou minimizar uma função linear que chamamos de Função Objetivo, respeitando um sistema linear de igualdades e desigualdades que tem o nome de Restrições do Modelo.

Os problemas nem sempre têm uma solução possível, mas há problemas que aceitam um conjunto diverso de solução. Por isso é imprescindível expressar algumas terminologias quando o assunto é solução.

- Solução – qualquer especificação de valores, dentro do domínio da função objetivo f(x), para as variáveis de decisão independente de se tratar de uma decisão desejável ou permissível.
- Solução viável – aquela que atende todas as restrições.
- Solução ótima – dependendo do requerido, ou maximização ou minimização, é o melhor valor para a f(x) que pode ser única ou um conjunto de valores.

Vejamos alguns exemplos onde os problemas são formalizados e modelados.

Exemplo 2.1.1:

Uma empresa de comida canina produz dois tipos de rações: Tobi e Rex. Para a manufatura das rações são utilizados cereais e carne. Sabe-se que:

i. A ração Tobi utiliza 5 kg de cereais e 1 kg de carne, e a ração Rex utiliza 4 kg de carne e 2 kg de cereais;
ii. O pacote de ração Tobi é vendido a R$ 20,00 com lucro de R$ 11,00 e o pacote de ração Rex por R$ 30,00 com lucro de R$ 12,00;
iii. A carne custa R$ 4,00 por quilo e o cereal custa R$ 1,00 por quilo;
iv. Estão disponíveis por mês 10.000 kg de carne e 30.000 kg de cereais.

Deseja-se saber qual a quantidade de cada ração a produzir de modo a maximizar o lucro. Nosso modelo deseja maximizar o lucro (Z) a partir da quantidade de ração Tobi (x_1) e de ração Rex (x_2).

Modelando matematicamente o problema, obtemos:

Função objetivo:

Máx. $\rightarrow Z = 11x_1 + 12x_2$ (Lucro)

Conjunto de restrições:

Sujeito à: $1x_1 + 4x_2 < 10.000$ (Restrição de carne)

$5x_1 + 2x_2 < 30.000$ (Restrição de cereal)

$x_1, x_2 > 0$ (Restrição de não negatividade)

Exemplo 2.1.2:

Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de R$ 5,00 e o do cinto é de R$ 2,00. Pede se: o modelo do sistema de produção do sapateiro, se o objetivo é maximizar seu lucro por hora.

x_1: quantidade de sapatos/hora x_2: quantidade de cintos/hora

Modelando matematicamente o problema, obtemos:

Função objetivo:

Máx. $\rightarrow Z = 5x_1 + 2x_2$ (Lucro)

Conjunto de restrições:

Sujeito à: $2x_1 + 1x_2 < 6$ (Restrição de couro)

$10x_1 + 12x_2 < 60$ (Restrição de tempo em minutos)

$x_1, x_2 > 0$ (Restrição de não negatividade)

2.2 Solução gráfica

Nesta subseção estão apresentados, e resolvidos de forma gráfica, alguns exemplos de Programação Linear contendo duas variáveis. Apesar de ser restrita a problemas pequenos, a solução gráfica oferece elementos facilitadores para a compreensão dos procedimentos do método que será exposto.

Ilustremos as seguintes situações: solução única, solução múltipla, solução ilimitada e solução infactível.

2.3 Solução única

No exemplo abaixo ilustraremos o caso onde é possível obter geometricamente uma solução ótima para o problema.

Exemplo 2.3.1:

Um Pintor faz quadros artesanais para vender numa feira que acontece todo dia à noite. Ele faz quadros grandes e desenhos pequenos, e os vende por R$ 5,00 e R$ 3,00, respectivamente. Ele só consegue vender 3 quadros grandes e 4 quadros pequenos por noite. O quadro grande é feito em uma hora (grosseiro) e o pequeno é feito em 1 hora e 48 minutos (detalhado). O desenhista desenha 8 horas por dia antes de ir para a feira. Quantos quadros de cada tipo ele deve pintar para maximizar a sua receita? Vejamos os dados:

	Preço	**Tempo para pintar**
Quadro grande	R$ 3,00	1,0 hora
Quadro pequeno	R$ 5,00	1,8 horas

Tabela 1- Preço X Tempo

A ideia é achar uma função que modele a maximização do lucro da venda dos quadros que chamamos de função objetivo, assim podemos escrevê-la:

Máx. → $F(x,y) = 5x_1 + 3x_2$ (Vendas por noite)

A restrição é que o artista pinta o quadro grande em 1 hora e o quadro pequeno em 1,8 horas e trabalha 8 horas por dia, então ficamos:

Sujeito à $1x_1 + 1,8x_2 < 8$ (Produção por dia)

$x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ (Não negatividade)

Veja que as restrições $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ e $1x_1 + 1{,}8x_2 < 8$, nos fornece uma região no plano que podemos chamar de região factível.

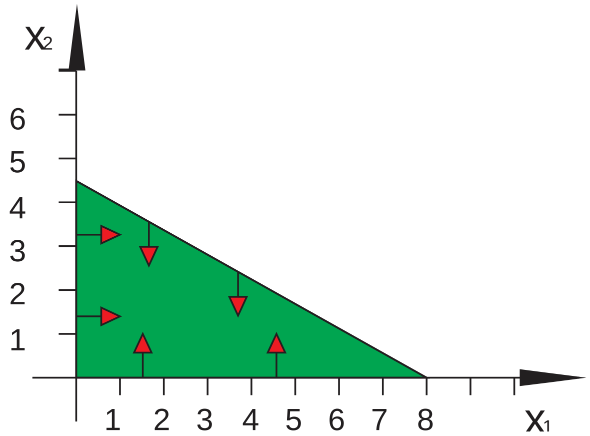

Figura 3 - Área factível 1

Ou seja, toda e qualquer solução dentro da área em destaque é uma solução possível e aceitável.

Identificação do ponto ótimo

Uma vez identificada a região factível, o ponto ótimo pode ser encontrado através do gradiente da função (derivadas parciais em cada variável) que é exatamente a "normal" da tal função objetivo. O vetor normal indica o crescimento da função, assim deslocada até alcançar o(s) ponto(s) da região viável com maior valor de **Z**. Portanto para o exemplo 4 temos (3,5).

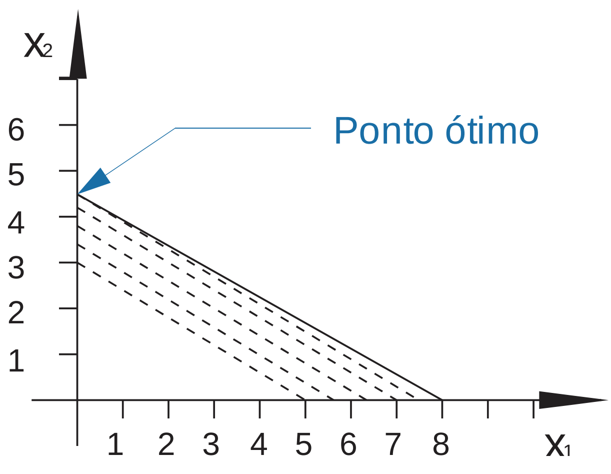

Figura 4- Ponto ótimo.

2.4 Múltiplas soluções

No exemplo abaixo ilustramos o caso onde o problema abordado admite múltiplas soluções ótimas.

Exemplo 2.4.1:

Uma transportadora entrega dois tipos de encomenda: produtos em caixas grandes e produtos em caixas pequenas. Uma encomenda em caixa pequena tem lucro de R$ 10,00 e os produtos entregues em caixas grandes têm lucro de R$ 15,00. A entrega acontece em dois caminhões. No caminhão baú a lotação acontece na proporção de duas caixas pequenas para uma grande para dentro da cidade e no caminhão de caçamba acontece na proporção de um para um, para fora da cidade. A cada viagem no caminhão baú, a lotação máxima é de 100 caixas e 80 caixas no caminhão caçamba. A demanda para as caixas pequenas é ilimitada, mas no máximo 40 caixas grandes são entregues a cada semana. Desejamos maximizar seu lucro.

Modelando matematicamente o problema, obtemos:

Máx. → $F(x_1,x_2) = 10x_1 + 15x_2$ (Lucro por caixa entregue)

Sujeito à: $2x_1 + 1x_2 < 100$ (Lotação do caminhão baú)

$1x_1 + 1x_2 < 80$ (Lotação do caminhão caçamba)

$x_2 < 40$ e $x_1, x_2 > 0$ (Limite de entrega e não negatividade)

Vejamos a área factível deste problema através do gráfico das funções e as restrições.

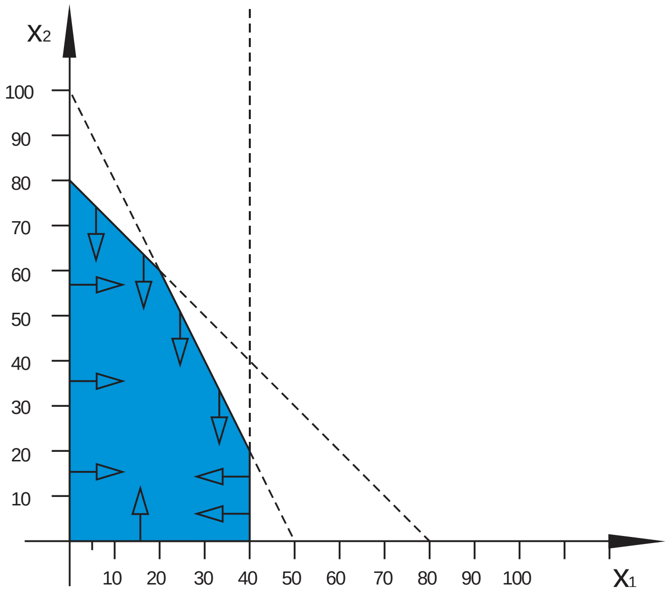

Figura 5 - Área factível 2

Na próxima figura podemos identificar o ponto ótimo ou pontos ótimos, deslocando a função objetivo na direção do vetor gradiente ao longo da região factível.

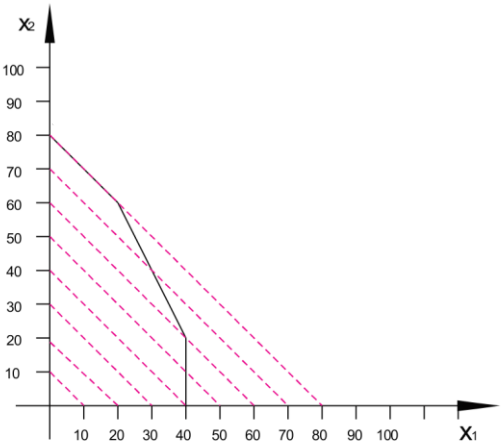

Figura 6 - Solução ótima.

Este tipo de problema nos dá uma série de soluções, pois a função objetivo coincide com a reta da função restrição, ou seja, qualquer valor que retirarmos na linha coincidente será uma solução ótima, veja o gráfico. Se escolhermos fabricarmos entre 80 a 65 soldados, essa quantidade terá um correspondência de trens, portanto para cada quantidade de soldado este possui uma quantidade de trens que por sua vez terá um lucro de igual valor e é por isso que afirmamos que temos várias soluções.

2.5 Soluções ilimitadas

No exemplo abaixo, ilustramos o caso onde o problema abordado admite soluções ilimitadas.

Exemplo 2.5.1:

Numa dieta de reposição vitamínica, um atleta é recomendado a se alimentar numa combinação de frutas e legumes. A cada 200g de fruta, 40g são de vitamina A e 20g de vitamina B. E nos legumes a cada 300g deste alimento, 20g são de vitamina A e 60g são de vitamina B. O atleta quer saber quantas gramas de cada alimento deve ingerir para atender o consumo mínimo de vitaminas orientado pelo nutricionista que é 45g de vitamina A e 70g de vitamina B. Por uma questão de diversidade recomenda-se que se ingira no mínimo 10g de fruta e 10g de legumes.

Modelando o problema, obtemos:

Máx. Z $\rightarrow$ $F(x_1,x_2) = 45x_1 + 70x_2$ (Quantidade de vitaminas)

Sujeito à: $40x_1 + 20x_2 > 200$ (Quantidade de vitamina por fruta)

$20x_1 + 60x_2 > 300$ (Quantidade de vitamina por legume)

$x_1 > 10$ e $x_2 > 30$ (Minimidade de consumo)

Analisando geometricamente as restrições, obtemos a região factível ilustrada na figura abaixo:

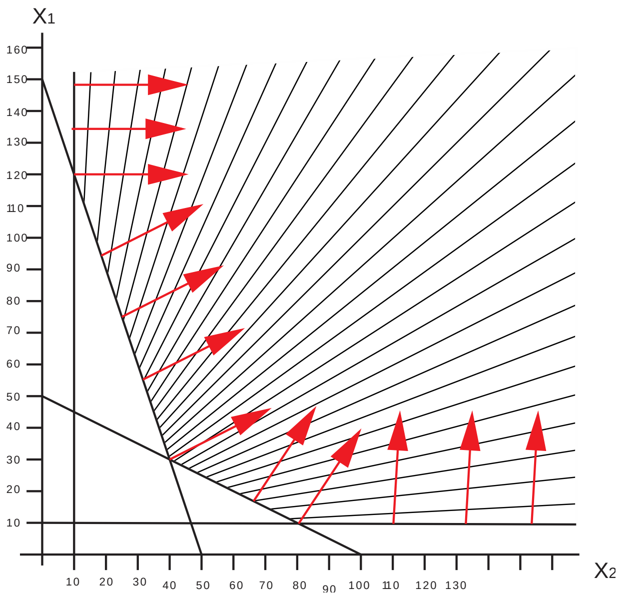

Figura 7 - Solução ilimitada.

Assim se deslocarmos a função objetivo na direção do vetor gradiente ao longo da região factível acharemos o ponto ótimo. No entanto, este ponto ótimo é o mínimo que o atleta pode consumir e todas as outras possibilidades dentro da área factível é uma combinação possível para a dieta.

Portanto, as soluções são infinitas. É bem plausível que o atleta vai consumir uma quantidade máxima de frutas e legumes, mas o que fica determinado neste estudo é que, por ser uma área, pode-se tirar uma infinidade de combinações dando liberdade de escolha de acordo com a necessidade.

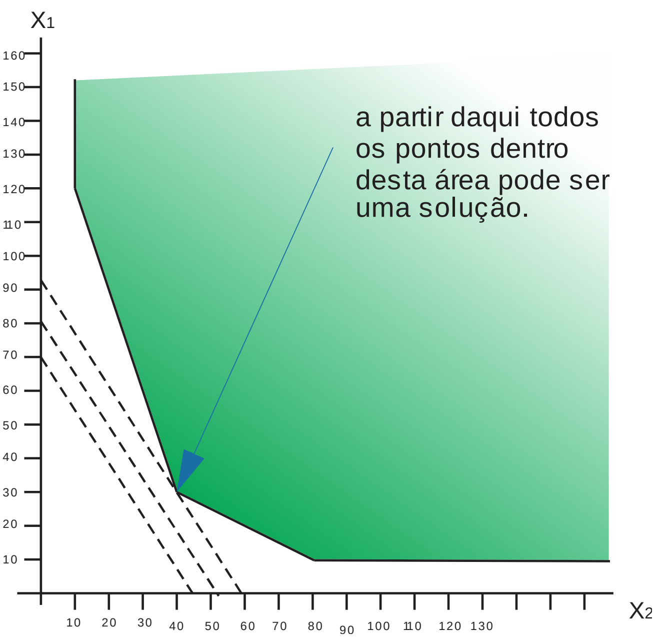

Figura 8 - Ponto ótimo

2.6 Soluções impossíveis (infactível)

No exemplo abaixo ilustraremos o caso em que o problema não admite solução possível.

Exemplo 2.6.1 – Na fabricação de dois modelos de brinquedos, trenzinhos e carrinhos, o lucro para cada dúzia de trenzinhos é de R$ 8,00 e para os carrinhos é de R$ 5,00. Tem-se de recursos disponíveis 1000 kg de plástico especial e 40 horas para produção semanal. Foi informado ao departamento de marketing que a produção total não pode exceder 700 dúzias. A quantidade de dúzias de trenzinhos não pode exceder em 350 a quantidade de dúzias dos carrinhos. Para os trenzinhos são requeridos 2 kg de plástico e 3 minutos por dúzia. Os carrinhos requerem 1 kg de plástico e 4 minutos por dúzia. Para a ocupação de 80% dos colaboradores utiliza-se um total de 2400 minutos. Mas o gerente de produção quer aproveitar mais de 80% dos colaboradores.

Modelando matematicamente o problema, obtemos:

Máx. Z → F(x,y) = $8x_1 + 5x_2$ (Lucro mensal)

Sujeito a: $2x_1 + 1x_2 \leq 1000$ (Tempo de produção em minutos)

$3x_1 + 4x_2 \geq 2400$ (Produção em minutos)

$x_1 + x_2 \leq 700$ (Produção total)

$x_1 - x_2 \leq 350$ (Mix)

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ (Não negatividade)

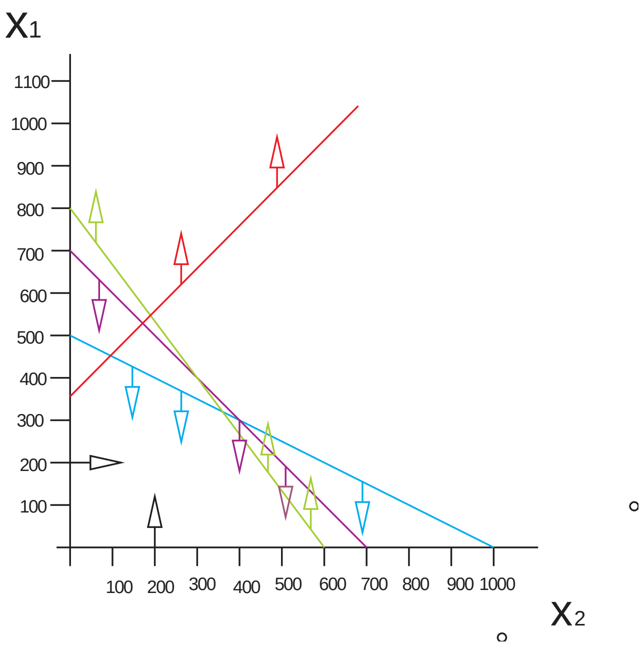

Figura 9 - Soluções impossíveis

Na intersecção das retas referentes às restrições não há uma área em comum, assim não há solução para o problema com estes parâmetros. A solução gráfica neste caso nos permite pensar que há uma solução, sim, se mudarmos os parâmetros que estão sujeitos o problema, ou seja, mesmo não havendo solução ainda temos pelo menos uma direção a seguir.

CAPÍTULO 3 : O MÉTODO SIMPLEX

No capitulo 2 abordamos a análise gráfica como uma ferramenta para resolver problemas com duas ou três variáveis, mas para problemas maiores este método torna-se impraticável. Portanto, necessitamos de uma técnica eficiente para resolver problemas maiores e mais complexos. Abordaremos aqui o método Simplex. O que se segue é a descrição da utilização do método.

O desenvolvimento do método é facilitado pela imposição de dois requisitos referente às restrições.

a) Todas as restrições são equações cujo lado direito é não negativo. Exceto a restrição de não negatividade.
b) Todas as variáveis são não negativas.

A finalidade de padronizar é tornar mais eficiente o método. Para tanto apresentaremos a Forma Padrão.

3.1 Forma Padrão

A forma padrão é expressa por meio de equações lineares.

Máx. ou Min $\rightarrow f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Em termos de matrizes podemos representa-la:

Min $f(x) = cx$

Sujeito à $Ax = b$

$x \geq 0$, em que

A => matriz *m x n* dos coeficientes tecnológicos

b => matriz *m x 1* das constantes do lado direito

x => matriz *n x 1* das variáveis de decisão

c => vetor *1 x n* dos coeficientes da função objetivo f(x).

3.2 Soluções básicas admissíveis

Considerando um problema na sua forma padrão e matricial, uma base é um conjunto de m variáveis, tais que a matriz dos coeficientes do sistema de equações lineares tem determinante nulo. Ou seja, dada uma matriz A, existe uma submatriz quadrada (mxm) regular contida em A (mxn), então podemos escrever A da seguinte forma:

A =[B | N] , onde N é a submatriz formada pelas colunas de A que não estão na base B.

Da mesma maneira podemos particionar o vetor X em:

$X = [\, X_B \mid X_N]^T$,

e o vetor c em:

$C = [\, C_B \mid C_N]$.

Portanto o problema pode ser escrito da seguinte forma:

Maximizar => $Z=[\, C_B \mid C_N\,]^T \times [X_B \mid X_N\,]$

Sujeito à $[B \mid N] \times [X_B \mid X_N\,] = b$ «=» $BX_B+NX_N=b$, $X \geq 0$

Assim podemos definir:

a) Variáveis básicas (VB) – as m variáveis que formam a base do sistema.
b) Variáveis não básicas (VNB) – as restantes n-m variáveis.
c) Solução básica (SB) – solução cujos valores da VNB são nulos.
d) Solução básica admissível (SBA) – SB com todas as VB negativas.
e) SBA não degenerada – SBA em que as VB são estritamente positivas.
f) SBA degenerada – SBA em que uma ou mais VB são nulas.
g) Base admissível – uma base que corresponde um SBA.
h) O conjunto de vértices de um politopo corresponde ao conjunto de soluções básicas admissíveis.
i) O conjunto de pontos extremos admissível corresponde ao conjunto das SBA e são ambos não vazios desde que a região admissível

seja não vazia. Cada SBA é equivalente a um ponto extremo, mas podem existir várias soluções para o mesmo ponto extremo.

3.3 Propriedades dos Pontos Extremos (PE)

Podemos destacar algumas propriedades dos pontos extremos.

1. Se existe apenas uma solução ótima, então essa solução é um PE.
2. Se existem varias soluções otimas, então pelo menos duas são PE.
3. Existe um número finito de PE.
4. Se PE admissível não tem PE admissíveis adjacentes melhores então esse PE é o ponto ótimo.

As propriedades 1 e 2 implicam que a pesquisa de uma solução ótima pode ser reduzida, considerando apenas os PE admissíveis, desta forma, existe um numero finito de soluções a considerar, que recai na propriedade 3. A propriedade 4 fornece um teste de ponto ótimo muito conveniente.

3.4 Método Simplex

O método explora as quatro propriedades descritas na seção anterior testando-as e parando logo que uma delas passe pelo teste de ponto ótimo. Assim, o método move-se repetidamente (iterativamente) do PE atual para um melhor PE admissível, até que não haja um PE adjacente melhor. Este processo possui os seguintes passos:

1. Iniciação – Começar com um PE admissível e qualquer que seja o PE pode ser adaptada como solução inicial.
2. Iteração – Mover para um melhor PE admissível adjacente e repetir este passo quantas vezes forem necessários, assim uma VNB converte a uma VB e vice-versa até identificar SBA.
3. Teste de ponto ótimo – O PE admissível atual é ótimo e nenhum dos seus adjacentes são melhores.

3.5 Algoritmo Primal (Problema de maximização)

Vamos descrever o método através de um exemplo prático.

Consideremos um problema de maximização na sua forma padrão. Vejamos um exemplo:

Exemplo 3.5.1 - Uma empresa fabrica dois tipos de produtos: travesseiros e almofadas. O lucro unitário líquido de cada um é R$ 45,00 para o travesseiro e R$ 30,00 da almofada. Numa máquina, o travesseiro é processado durante 2 minutos. E a almofada em 1 minuto. A máquina está disponível 1000 minutos por dia. Cada um dos produtos requer 1 minuto de mão-de-obra direta. A disponibilidade de mão-de-obra é 800 minutos por dia. Estudos de mercado indicam que a procura dos produtos não excede 400 e 700 unidades, respectivamente. Quantas unidades de travesseiro e almofadas devem ser fabricadas de modo a maximizar o lucro? Formalização do problema:

x_1 = quantidade de travesseiros

x_2 = quantidade de almofadas

Máx. $z = 45\,x_1 + 30\,x_2$ (lucro)

s. a $2\,x_1 + x_2 \leq 1\,000$ (máquina)

$x_1 + x_2 \leq 800$ (mão-de-obra)

$x_1 \leq 400$ (procura de travesseiros)

$x_2 \leq 700$ (procura de almofadas)

$x_1, x_2 \geq 0$

Para colocarmos na forma padrão devemos considerar que o lado direito das restrições é um limite imposto à disponibilidade de um de certo recurso. O lado esquerdo é a utilização deste recurso limitado pelas variáveis. A diferença entre um lado e outro pode ser interpretada como uma quantidade de recurso não utilizado ou uma folga. Deste modo podemos eliminar a desigualdade somando uma variável de folga não negativa, no caso da desigualdade ≤, no lado esquerdo da inequação, ou subtraindo uma variável de folga não negativa, no caso da desigualdade (≥), no lado esquerdo da inequação. Observemos como fica no exemplo:

$$\text{s. a}\quad \begin{array}{rcl} 2\,x_1 + x_2 + x_3 & & = 1\,000 \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 & & = 800 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_5 & & = 400 \\ + x_2 \qquad\qquad + x_6 & & = 700 \end{array}$$

Feito isso podemos partir para a construção do quadro simplex:

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	2º M.
x_3	2	1	1	0	0	0	1000
x_4	1	1	0	1	0	0	800
x_5	1	1	0	0	1	0	400
x_6	0	1	0	0	0	1	700
$Z_j - C_j$	-45	-30	0	0	0	0	0

Alocado os valores da função objetiva e as restrições no quadro, partimos para o próximo passo. Escolheremos a coluna que irá sair da base verificando o maior valor negativo dentre os valores da linha da função objetivo **(Z_j - C_j)**.

Feito isto determinamos então a coluna pivô. Agora precisamos definir qual linha irá entrar na base. Tomemos a coluna do 2º membro e dividimos cada valor pelo correspondente da coluna pivô e tomemos a linha que possui o menor valor achado na divisão.

X_B	x_1	2º M.	
x_3	2	1000	1000/2 = 500
x_4	1	800	800 /1 = 800
x_5	1	400	400/1 = 400
x_6	0	700	0
$Z_j - C_j$	-45	0	

Então temos a linha, a coluna e o elemento pivô e sabemos qual a coluna que sai da base e qual a linha que entra. Veja no quadro em destaque.

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	2º M.
x_3	2	1	1	0	0	0	1000
x_4	1	1	0	1	0	0	800
x_5	1	1	0	0	1	0	400
x_6	0	1	0	0	0	1	700
$Z_j - C_j$	-45	-30	0	0	0	0	0

Linha pivô

Coluna pivô

Elemento pivô

Conservando o elemento pivô devemos fazer iterações usando-o para deixar a coluna pivô zerada e consequentemente os valores das linhas irão se modificar de acordo com as iterações, vejamos:

	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	2º M.
$L_1 - 2L_3$	x_3	2	1	1	0	0	0	1000
$L_2 - L_3$	x_4	1	1	0	1	0	0	800
L_3	x_5	1	1	0	0	1	0	400
L_4	x_6	0	1	0	0	0	1	700
$L_5 + 45L_3$	$Z_j - C_j$	-45	-30	0	0	0	0	0

Assim executaremos a primeira iteração surgindo um novo quadro:

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	2º M.
x_3	0	1	1	0	-2	0	200
x_4	0	1	0	1	-1	0	400
x_5	1	0	0	0	1	0	400
x_6	0	1	0	0	0	1	700
$Z_j - C_j$	0	-30	0	0	0	0	-18000

Procedendo da mesma maneira e buscando deixar a linha com valores positivos, temos:

2ª Iteração

	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	2º M.	
$L_1 + 2L_2$	x_2	0	1	1	0	-2	0	200	---
L_2	x_4	0	0	-1	1	-1	0	200	200/1 = 200
$L_3 - L_2$	x_1	1	0	0	0	1	0	400	400/1 = 400
$L_4 - 2L_2$	x_6	0	0	-1	0	2	1	500	500/2 = 250
$L_5 + 15L_2$	$Z_j - C_j$	0	0	30	0	-15	0	-24000	

3ª Iteração

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	2º M.
x_2	0	1	-1	2	0	0	600
x_5	0	0	-1	1	1	0	200

x_1	1	0	1	-1	0	0	200
x_6	0	0	1	-2	0	1	100
$Z_j - C_j$	0	0	15	15	0	0	27000

Vejam que podemos definir os valores ideais para a maximização do lucro é

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	2º M.		Valor		
x_2	0	1	-1	2	0	0	600	x	30	=	18000
x_5	0	0	-1	1	1	0	200				
x_1	1	0	1	-1	0	0	200	x	45	=	9000 +
x_6	0	0	1	-2	0	1	100				
$Z_j - C_j$	0	0	15	15	0	0	27000		←Zmax		27000

Olhando para a coluna X_1 temos o valor 1 na linha X_1 que corresponde a 200 na coluna do 2º M. e que para o preço do X_1 é de R$ 30,00, resultando em R$ 18.000,00. Para coluna X_2 temos o valor 1 na linha X_2 que corresponde a 200 na coluna 2º M que se multiplicarmos por R$ 45,00, temos R$ 9.000,00. E que se somarmos os dois valores temos a maximização de R$ 27.000,00.

3.6 Técnica da base artificial e o método M-Grande .

Muitas vezes a matriz A do problema

Máx. f(x)

s.a. $\begin{cases} A.X \blacktriangledown b, & \blacktriangledown \in \{\leq, =, \geq\} \\ X \geq 0 \end{cases}$

não contém uma submatriz identidade, de modo que se faz necessário introduzir algumas variáveis artificiais visando arranjar uma submatriz identidade de ordem m.

No entanto, na solução final desejamos que estas variáveis extras sejam retiradas da base, estando no nível zero.

Para forçar a saída das variáveis artificiais da base abordaremos o método do M-Grande. Em tal método, as variáveis artificias são “fortemente” penalizadas na função objetivo, visando provocar rapidamente o seu anulamento, este anulamento tende a ser feito naturalmente pelo Método Simplex, que tenderá a eliminar da base as variáveis artificiais, uma vez que elas estarão penalizadas com coeficientes arbitrariamente grandes (-M) na maximização e M na minimização.

Ilustraremos este método através do próximo exemplo.

Exemplo 3.6.1:

Uma pequena empresa fabrica 3 tipos de kits electrónicos: A, B e C. O lucro unitário líquido de cada um é R$ 5,00 (A), R$ 10,00 (B) e R$ 15,00 (C). O tempo disponível limita o número total de kits que podem ser fabricados, a 500. Estudos de mercado indicam que o total de kits tipos A e B devem ser pelo menos 100. O total de kits tipo A deve exceder exatamente em 120 o total de kits tipos B e C. Quantas unidades de A, B e C devem ser fabricadas de modo a maximizar o lucro?

x_1 = quantidade de unidades do kit A

x_2 = quantidade de unidades do kit B

x_3 = quantidade de unidades do kit C

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max. } Z = 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 & & \text{(lucro)} \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 & \text{(capacidade)} \\
& x_1 + x_2 \geq 100 & \text{(procura de A e B)} \\
& x_1 - x_2 - x_3 = 120 & \text{(excedente de A)} \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Tornando-a forma padrão, ficamos com:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max. } Z = 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 & \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 500 \\
& x_1 + x_2 + - x_4 = 100 \\
& x_1 - x_2 - x_3 = 120 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Como não conseguimos chegar a uma matriz identidade, portanto usaremos a técnica acrescentando variáveis artificiais (M).

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max. } Z = 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \quad (M \approx +\infty) & \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 500 \\
& x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 100 \\
& x_1 - x_2 - x_3 + x_7 = 120
\end{array}
$$

$x_i \geq 0$, i = 1,...,7 (x_6, x_7 - variáveis artificiais)

E agora podemos aplicar o método simplex, vamos para o quadro:

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	2º M.
x_5	1	1	1	0	1	0	0	500
x_6	1	1	0	-1	0	1	0	100
x_7	1	-1	-1	0	0	0	1	120
$Z_j - C_j$	-5	-10	-15	0	0	M	M	0

Vejam como os valores de z_j-c_j (j = 6, 7) são não nulos (M) e x_6 e x_7 são variáveis básicas (portanto, para que se possa aplicar o algoritmo Simplex têm que ter zj − cj = 0, j = 6, 7), é necessário construir uma nova linha para zj − cj, o que se faz da seguinte forma:

Linha 4			[	-5	-10	-15	0	0	M	M	0	]
Linha 2 - x_6	-M	x	[	1	1	0	-1	0	1	0	100	]
Linha 3 - x_7	-M	x	[	1	-1	-1	0	0	0	1	120	]

Tomamos as linhas 2, 3 e 4. Multiplicamos a linha 2 e 3 por -M e por fim somamos as três, obtendo a nova linha 4.

Linha 4	[	-5	-10	-15	0	0	M	M	0	]	
Linha 2 - x_6	[	-1M	-1M	0	1M	0	-1M	0	-100M	]	
Linha 3 - x_7	[	-1M	1M	1M	0	0	0	-1M	-120M	]	+
Nova Linha 4		-2M-5	-10	M-15	M	0	0	0	-220M		

Assim substituímos a linha 4 pela nova e começamos a aplicar o método simplex na sua forma comum de resolução. Seleciona-se o maior valor negativo dentre os valores da linha da função objetivo (**Z_j - C_j**). Chegando assim na coluna pivô. Dividem-se os valores do 2º M. pelos valores da coluna pivô e toma-se o de menor valor obtendo assim a linha pivô. Assim podemos fazer as operações necessárias.

Passo inicial:

	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	2º M.
L_1 -L_2	x_5	1	1	1	0	1	0	0	500

L_2	x_6	1	1	0	-1	0	1	0	100
$L_3 - L_2$	x_7	1	-1	-1	0	0	0	1	120
$L_4 + (2M+5)*L_2$	$Z_j - C_j$	-2M-5	-10	M-15	M	0	0	0	-220M

1ª Iteração

	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	2º M.
$L_1 - L_3$	x_5	0	0	1	1	1	-1	0	400
$L_2 - L_3$	x_1	1	1	0	-1	0	1	0	100
L_3	x_7	0	-2	-1	1	0	-1	1	20
$L_4 + (M+5)*L_2$	$Z_j - C_j$	0	2M-5	M-15	-M-5	0	2M+5	0	-20M+500

2ª Iteração

	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	2º M.
$1/21L_1$	x_5	0	2	2	0	1	0	-1	380
$L_2 + 1/2L_1$	x_1	1	-1	-1	0	0	0	1	120
$L_3 + 1/2L_1$	x_4	0	-2	-1	1	0	-1	1	20
$L_4 + 10L_1$	$Z_j - C_j$	0	-15	-20	0	0	M	M+5	600

3ª Iteração

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	2º M.
x_3	0	1	1	0	0,5	0	-0,5	190
x_1	1	0	0	0	0,5	0	0,5	310
x_4	0	-1	0	1	0,5	-1	0,5	210
$Z_j - C_j$	0	5	0	0	10	M	M-5	4400

Como todos os elementos da linha (zj − cj) são não negativos, então a solução presente é ótima.

CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, pudemos verificar através de diversos exemplos que a pesquisa operacional reúne ferramentas extremamente eficientes para a modelagem e resolução de uma grande quantidade de problemas que envolvem tomadas de decisão sujeitas a restrições das mais diversas naturezas, e nas mais diversas áreas do conhecimento.

Em mercados cada vez mais competitivos devemos aproximar as áreas do conhecimento e indústria e assim podemos garantir contribuições significativas para o Brasil tanto na área da pesquisa quanto na área fabril. Pois, a indústria sem o conhecimento é fadada ao fracasso e o conhecimento sem a prática é estéril.

REFERÊNCIAS

PIZZOLATO, Nélio Domingues; GANDOLPHO, André Alves. Técnicas de Otimização. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2009. 225 p.

HILLIER, Frederick S; LIEBERMAN, Gerald J. Introdução à Pesquisa Operacional, 8ª edição, São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

MARINS, Fernando Augusto Silva. Introdução à Pesquisa Operacional, São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2011. 176 p.

SOBRAPO, Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. Disponível em: <http://www.sobrapo.org.br >. Acesso em: 17 de setembro de 2014.

ANDRADE, E. X. L., SAMPAIO, R., SILVA, G. N., Notas em Matemática Aplicada, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, Vol. 18, 2012.

GUERREIRO, J., MAGALHÃES, A., RAMALHETE, M., Programação Linear, MacGraw-Hill, Vol. I e II, 1985.

CANTÃO, L. A. P., STARK, F. S., Programação Linear-PL, Notas de Aula, Unesp - Campus Sorocaba.