INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Birigui

Licenciatura em Matemática

Fábio Rogério Fardin

ESTUDO DA ESTABILIDADE DO PONTO DE EQUILÍBRIO DE UM SISTEMA LINEAR

BIRIGUI - SP
2015

Fábio Rogério Fardin

ESTUDO DA ESTABILIDADE DO PONTO DE EQUILÍBRIO DE UM SISTEMA LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Birigui, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: M.e Prof. Gustavo Jorge Pereira

BIRIGUI - SP
2015

Fardin, Fábio Rogério.

Estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio de um sistema linear / Fábio Rogério Fardin. – Birigui, 2015.
32f.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Birigui.

Orientador: Gustavo Jorge Pereira.

1. Sistemas de equações diferenciais. 2. Estudo dos pontos de equilibrio. 3. Wronskiano. I. Pereira,Gustavo Jorge. II. Lima, Manuella Aparecida Felix de III. Borges, Lívia Teresa Minami . IV. TÍTULOEstudo da estabilidade do ponto de equilíbrio de um sistema linear.

Fábio Rogério Fardin

ESTUDO DA ESTABILIDADE DO PONTO DE EQUILÍBRIO DE UM SISTEMA LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Birigui, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Comissão Examinadora

____

Prof. M.e Gustavo Jorge Pereira, IFSP - Câmpus Birigui

____

Prof.a M.a Manuella Aparecida Felix de Lima, IFSP - Câmpus Birigui

____

Praf.a M.a Lívia Teresa Minami Borges, IFSP - Câmpus Birigui

Birigui, _____ de ________________de __________.

Dedico este trabalho a meus pais por ter chego até aqui.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela oportunidade concedida.

Aos meus pais, Alberto Fardin e Edna Pereira Fardin, por todo incentivo e apoio.

Ao meu orientador Prof. M.e Gustavo Jorge Pereira, por acreditar e incentivar a conclusão do meu trabalho e pelo esforço, horas e fins de semana dedicados.

À minha namorada Lilian K. Kojima pela paciência, apoio, e as jantas fora de hora.

Às Prof.as M.a Manuella Aparecida Felix de e M.a Lívia Teresa Minami Borges, pela paciência pelos trabalhos entregues no limite do tempo e pela ajuda na conclusão do curso.

Aos meus inúmeros amigos de faculdade, pelos trabalhos, pelas festas, pelas companhias.

“A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original.” (EINSTEIN)

Resumo

Inicialmente foram apresentadas algumas propriedades de matrizes úteis em nosso estudo, cálculo de autovalores e autovetores e algumas definições como por exemplo ponto de equilíbrio. O tema central do trabalho são os sistemas de equações diferenciais ordinárias. Por seguinte, estudamos métodos de resoluções dos sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, envolvendo autovalores e autovetores, fazendo uma análise gráfica destas soluções, assim como a transformação de equações diferencias de qualquer ordem em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.

Palavras-chave: Matrizes. Autovalor. Pontos de equilibrio. Sistema Equações Diferenciais.

Abstract

Firstly it was presented some properties of matrix used in our study, calculations of eigenvalues and eigenvectors, and some definitions, for example, balancing point. The main subject of this case is the systems of ordinary differential equations. Therefore, we study methods to solve the systems of ordinary differential equations of the first order involving eigenvalues and eigenvectors through graphical analysis of these solutions, as the transformation of these ordinary differential equations at any order.

Keywords: Matrix. Eigenvalues. Balancing point. System Differential equations.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como tema principal sistemas de equações diferencias e resoluções.

O capítulo 1 trata de alguns assuntos pertinentes à resolução de tais sistemas, como por exemplo matrizes, cálculo de autovalores e autovetores, pontos de equilíbrio, etc. Dentro do assunto matrizes serão tratadas suas operações tais como a soma, subtração, multiplicação e, também, matriz nula, matriz identidade, funções matriciais (que são matrizes cujos elementos são funções de alguma variável). Também será abordado um conceito de Álgebra Linear muito importante para a resolução destes sistemas, que é o cálculo de autovalores e autovetores, assim como polinômio característico. Ademais, irá tratar sobre pontos de equilíbrio, muito importante para a análise dos gráficos gerados por estes sistemas. E ainda dentro deste assunto abordou-se sistemas autonômos e as consequências do Teorema da Existência e Unicidade.

O capítulo 2, terá o tema principal do trabalho, Sistemas de Equações Diferenciais, que é um modelo muito usado em problemas de circutos elétricos, problemas mecânicos, crescimento populacional ou de bactérias, dentre outros. Juntamente com este assunto serão abordados os conceitos: Wronskiano, conjunto fundamental de soluções e sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes, que são fundamentais para resolução destes sistemas.

Capítulo 1

Conhecimentos prévios

Esse capítulo irá abordar alguns conceitos de álgebra linear que serão necessários para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio de uma equação diferencial autônoma de primeira ordem ou de um sistema linear de segunda ordem.

1.1 Matrizes

Denota-se uma matriz por letra maiúscula. Uma matriz A nada mais é do que uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

é uma matriz de ordem mxn (m é o número de linhas e n é o número de colunas) cujos elementos podem ser números reais ou complexos. O elemento a_{ij} está localizdo na i-ésima linha e na j-ésima coluna.

Esse trabalho conterá dois tipos de matrizes: matrizes quadradas (mesmo número de linhas e colunas, ou seja, $m = n$) e vetores (vetores colunas que podem ser considerados como matrizes nx1).

1.2 Propriedades de matrizes

Definição 1. Igualdade

Sejam A e B duas matrizes de ordem mxn. Dize-se que $A = B$ se todos os elementos correspondentes são iguais, ou seja, se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i e todo j.

Definição 2. Matriz Nula

Diz-se que uma matriz O é nula quando todos seus elementos são iguais a zero.

Definição 3. Soma

Sejam A e B duas matrizes de ordem mxn. A soma das matrizes A e B é definida por: $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij})$. Dessa definição, segue que a soma de matrizes é comutativa e associativa, isto é, $A + B = B + A$ e $A + (B + C) = (A + B) + C$, respectivamente, pois a soma dos elementos dessas matrizes são números reais ou complexos que admite a propriedade comutativa e associativa.

Definição 4. Multiplicação por um número

O produto de uma matriz A por um número α é definido por: $\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$. As propriedades distributiva $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ são satisfeitas por esse tipo de multiplicação. Em particular, o produto $(-1)A = -A$ é a matriz oposta de A.

Definição 5. Subtração

Sejam A e B duas matrizes de ordem $m$xn. A diferença das matrizes A e B e definida por: $A - B = A + (-B)$, isto é, $A - B = (a_{ij}) - (b_{ij})$.

Definição 6. Multiplicação

Sejam A e B duas matrizes. O produto de A e B (AB) é definido quando o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Por exemplo: sejam $A_{m\text{x}n}$ e $B_{n\text{x}r}$ matrizes, o produto AB é uma matriz C de ordem $m\text{x}r$ cujos elementos c_{ij} são determinador da seguinte maneira

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

A multiplicação de matrizes satisfaz as propriedades: associativa $((AB)C = A(BC))$ e distributiva $(A(B+C) = AB+AC)$, mas não é comutativa $(AB \neq BA)$. Para que existam os produtos AB e BA é necessário que as matrizes A e B sejam quadradas e de mesma ordem, mesmo nesse caso, os produtos não são necessariamente iguais.

Definição 7. Matriz identidade

A matriz diagonal I de ordem n com todos os elementos da diagonal principal iguais a um é chamada de matriz identidade. Por exemplo:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\text{x}n}.$$

Segue da definição que $AI = IA = A$ para quaquer matriz quadrada A de ordem n. Assim, pode-se concluir que a propriedade comutativa de matrizes é válida para matrizes quadradas se uma delas for a identidade.

Definição 8. Inversa

Diz-se que uma matriz A é **não singular** ou **invertível** se existir uma matriz B tal que $AB = I$ e $BA = I$, sendo I a matriz identidade. Caso B exista, pode-se mostrar que ela é única e, nesse caso, B é chamada de matriz inversa de A $(B = A^{-1})$, assim $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. A matriz que não tem inversa é chamada de singular ou não invertível.

Definição 9. Determinante

Toda matriz quadrada A está associada a um valor numérico chamado determinante que será denotado por $det(A)$. O determinante da matriz $A = (a_{11})$ é o escalar a_{11}, isto é, $det(A) = a_{11}$. Já o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

é definido por $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. E o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

é definido por $det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Definição 10. Matriz diagonal

A matriz $A = (a_{ij})_{n\text{X}n}$ com $n \geq 2$ é chamada de matriz diagonal se todos os elementos $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

1.3 Funções matriciais

São vetores ou matrizes cujos elementos são funções de uma variável real t. Por exemplo:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{in}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}.$$

A matriz $A(t)$ é contínua em um ponto $t = t_0$, ou em um intervalo $\alpha < t < \beta$ se todos os elementos de $A(t)$ são funções contínuas nesse ponto, ou nesse intervalo. Analogamente, $A(t)$ é diferenciável se todos seus elementos são diferenciáveis e sua derivada $\dfrac{dA(t)}{dt}$ é definida por:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt}\right);$$

Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, J um intervalo de $\mathbb{R}$ e uma função $f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$contínua. Denota-se por $f_j(t,x)$, $j = 1, \dots, n$, as coordenadas de $f(t,x)$, ou seja, $f(t,x) = (f_1(t,x), \dots, f_n(t,x))$, sendo que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Considere o sistema de equações diferenciais $\dot{x} = \dfrac{dx_j}{dt} = f_j(t,x)$, $j = 1, \dots n$, equivalente a equação $\dot{x} = f(t,x)$ (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2011).

1.4 Autovalor e autovetor

Seja A uma matriz quadrada qualquer, diz-se que um escalar λ é um autovalor de A se existe um vetor (coluna) não nulo v tal que $Av = \lambda v$. Qualquer vetor satisfazendo essa relação é denominado autovetor de A associado (ou correspondente, ou pertencente) ao autovalor λ. Observe que qualquer múltiplo escalar Kv de um autovetor v associado a λ também é um autovetor associado a λ, pois: $A(Kv) = K(Av) = K(\lambda v) = \lambda(Kv)$.

Definição 11. Polinômio característico

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. A matriz $M = A - \lambda I_n$, em que I_n é a matriz quadrada identidade de ordem n e λ é uma incógnita, pode ser obtida subtraindo λ de cada elemento diagonal de A. O $\triangle(\lambda) = det(\lambda I_n - A) = (-1)^n det(A - \lambda I_n)$ que é um polinômio de grau n em λ, deniminado polinômio característico de A. As raízes deste polinõmio são os autovalores de A.

Exemplo 1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ temos:

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$det(M) = (\lambda - 3)(\lambda - 2) - 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 3\lambda + 6 - 2$$

$$det(M) = \triangle(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

tem raízes $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$.

Sendo assim, para encontrar os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$, resolvemos $A.v = \lambda.v$:

para $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\xi^1 + \xi^2 = \xi^1 \\ 2\xi^1 + 2\xi^2 = \xi^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\xi^1 + \xi^2 = 0 \\ 2\xi^1 + \xi^2 = 0 \end{cases}$$

$$\xi^2 = -2\xi^1$$

logo, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. E também; para $\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\xi^1 + \xi^2 = 4\xi^1 \\ 2\xi^1 + 2\xi^2 = 4\xi^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\xi^1 + \xi^2 = 0 \\ 2\xi^1 - 2\xi^2 = 0 \end{cases}$$

$$\xi^1 = \xi^2$$

logo $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.5 Sistemas autônomos no plano

Será abordado aqui uma análise qualitativa das equações diferenciais, dando ênfase, através da análise das equações, a obter propriedades das soluções.

O sistema na forma:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{1.1}$$

é denominado de sistema autônomo quando f e g não dependem explicitamente da variável t (tempo) e as soluções $(x(t), y(t))$ são curvas parametrizadas no plano de fases (x, y) denominadas órbitas. O sentido geométrico do (1.1) é o seguinte: $(f(x, y), g(x, y))$ é um campo vetorial no plano e as órbitas são curvas integrais desse campo, isto é, as curvas que em cada ponto são tangentes ao campo. (FIGUEIREDO; NEVES, 2012).

1.5.1 Existência e unicidade

Teorema 1. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num intervalo aberto Ω do plano (xy). Suponhamos que a derivada parcial com relação a segunda variável, $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$, seja contínua também. Então para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial (P.V.I.).*

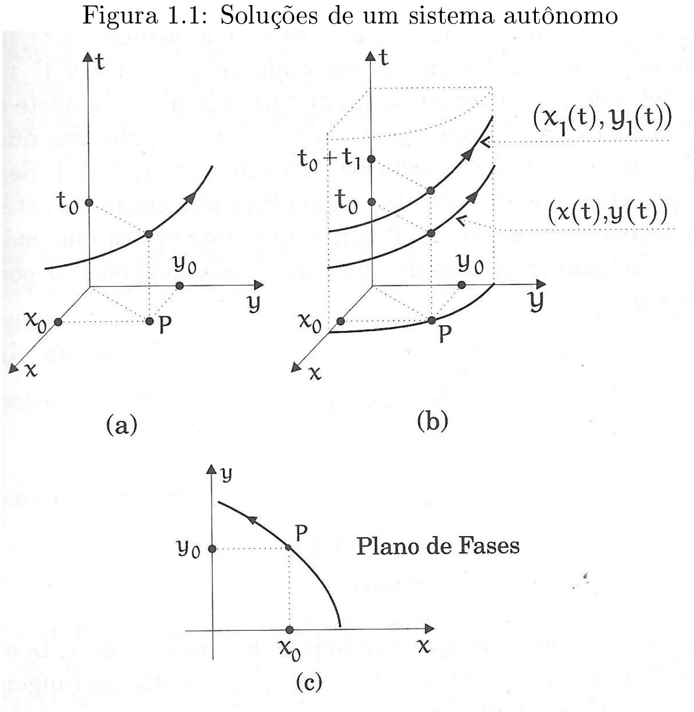
$$\begin{array}{rcl} y' & = & f(x, y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array}.$$

(FIGUEIREDO; NEVES, 2012, p. 51)

1.5.2 Consequências do teorema de existência e unicidade

A hipótese de f e g em (1.1) serem de classe C^1, ou seja, $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são funções contínuas diferenciáveis, garante que para qualquer (x_0, y_0, t_0) existe uma e somente uma solução $(x(t), y(t))$ do sistema (1.1) tal que $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, como mostra a figura 1.1(a). Como o sistema (1.1) é autônomo, segue que, se $(x(t), y(t))$ for uma solução desse sistema e t_1 é um número fixo, então: $(x_1(t), y_1(t)) = (x(t + t_1), y(t + t_1))$ também é solução do (1.1). De fato: Para verificar essa afirmação basta mostrar que $x_1(t)$ e $y_1(t)$ satisfazem o sistema, ou seja, $x_1'(t) = x'(t + t_1) = f(x(t + t_1), y(t + t_1)) = f(x_1(t), y_1(t))$ e $y_1'(t) = y_1'(t + t_1) = g(x(t + t_1), y(t + t_1)) = g(x_1(t), y_1(t))$, o que mostra que $(x_1(t + t_1), y_1(t + t_1))$ é uma translação de $(x(t), y(t))$ paralelamente ao eixo t, como mostra a figura 1.1(b). (FIGUEIREDO; NEVES, 2012).

Figura 1.1: Soluções de um sistema autônomo



Fonte: Figueiredo; Neves (2012, p. 207)

1.5.3 Pontos de equilíbrio e singularidade

As soluções constantes $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ de (1.1) as quais são os zeros do sistema:

$$\begin{cases} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

são chamadas de pontos de equilíbrio, nomenclatura inspirada no seu significado físico, ou singularidades, nomenclatura proveniente do seu sentido geométrico. Os pontos não singulares são chamados de regulares.

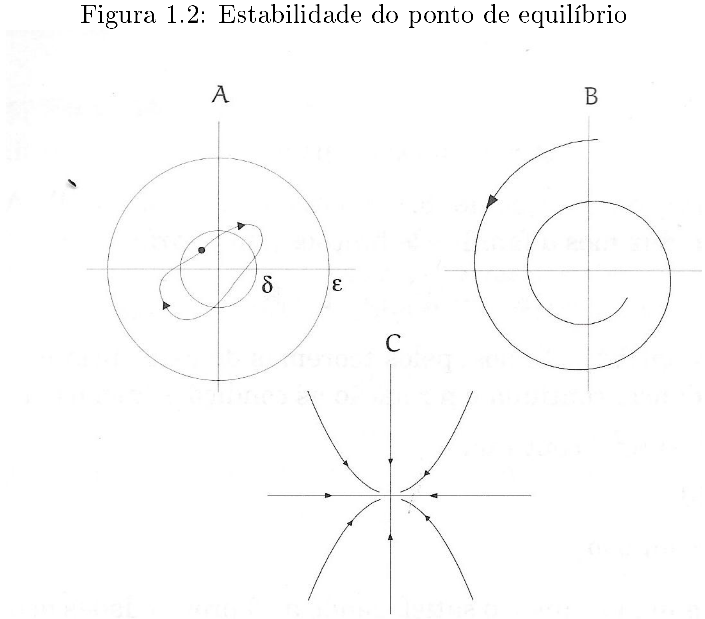
1.5.4 Ponto de equilíbrio estável

Definição 12. Um ponto de equilibrio (x_0, y_0) é estável se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para qualquer órbita $(x(t), y(t))$ com $dist((x(0), y(0), (x_0, y_0)) < \delta$ tenhamos $dist((x(t), y(t), (x_0, y_0)) < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.

Definição 13. Um ponto de equilíbrio (x_0, y_0) é assintoticamente estável se ele for estável e se existir um $\eta > 0$ tal que toda órbita $(x(t), y(t))$ com $dist((x(0), y(0), (x_0, y_0)) < \eta$ então $\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t) = (x_0, y_0)$. Levando a conclusão de que as órbitas convergem para o ponto de equilíbrio.

Veja os exemplos na figura 1.2.

Figura 1.2: Estabilidade do ponto de equilíbrio



Fonte: Figueiredo; Neves (2012, p.212)

A figura 1.2 tem a origem como ponto de equilíbrio o qual é assintoticamente estável em B e C, já em A é somente estável.

1.5.5 Estudos dos pontos de equilibrio

O sistema

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases} \tag{1.3}$$

pode ser escrito na forma matricial $X' = AX$, para isso considere $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. A equação $x' = ax$ tem a solução geral $x(t) = ce^{at}$ ocorre que:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\alpha t} \\ y(t) = c_2 e^{\alpha t} \end{cases},$$

ou equivalente, $X(T) = Ce^{\alpha t}$.

Substituindo em (1.3) tem-se

$$\begin{cases} (a-\alpha)c_1 + bc_2 = 0 \\ cc_1 + (d-\alpha)c_2 = 0 \end{cases}.$$

Como apenas as soluções não triviais são interessantes ($c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$, ou ambos) o determinante do sistema deve ser zero, isto é,

$$\begin{vmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\alpha \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \alpha^2 - (a+d)\alpha + (ad-bc) = 0$$

e de acordo com o discriminante, $\triangle = (a-d)^2 + 4bc$, obtém diferentes tipos de pontos, como observa-se na tabela e alguns exemplos de ponto de equilíbrio.

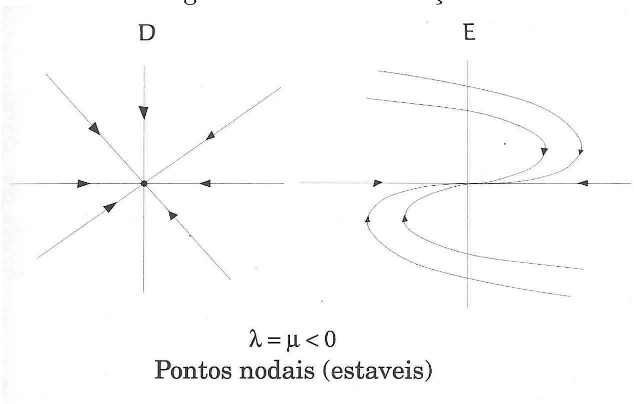
Tabela 1.1: Tipo de singularidade

$\triangle$	$ad-bc$	$a+d$	Tipo de Singularidade
>0	<0		sela
>0	>0	<0	nó estável
>0	>0	>0	nó instável
<0		$=0$	centro
<0		<0	ponto espiral estável
<0		>0	ponto espiral instável
$=0$		<0	nó estável
$=0$		>0	nó instável

Fonte: Figueiredo; Neves(2012, p.219)

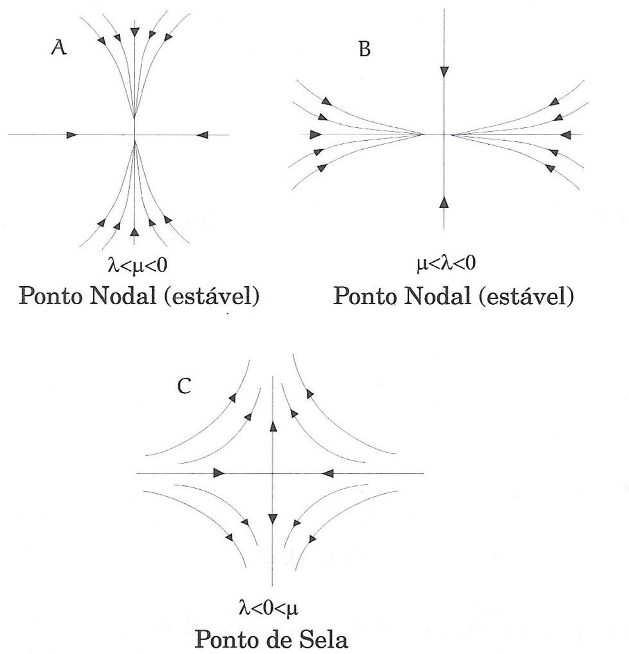
Para $ad-bc>0$ e $a+d<0$ obtém-se os autovalores λ e μ negativos (figura 1.4 A e B). No caso em que $ad-bc>0$ e $a+d>0$ os autovalores λ e μ tem sinais opostos (figura 1.4 C).

Figura 1.3: Curvas soluções



Fonte: Figueiredo; Neves (2012, p.217)

Figura 1.4: Pontos nodais



Fonte: Figueiredo; Neves(2012, p.216)

Capítulo 2

Sistemas de equações diferenciais

Problemas de circutos elétricos, problemas mecânicos, crescimento populacional ou de bactérias, são modelados por equações diferenciais. Essas equações podem ser transformada em sistema de equações diferenciais com o intuido de analisar o comportamento de estabilidade nas proximidades de seus pontos de equilíbrio. A definição de sistema de equações diferenciais lineares é dada da seguinte maneira.

Sejam

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ e } b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_1(t) \end{pmatrix},$$

funções matriciais em que $A(t)$ e $b(t)$ está definida para todo $t \in (a, b)$. A equação

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{2.1}$$

é um sistema de equações diferenciais linear. Uma solução do sistema de equações diferenciais (2.1) é uma função $x : I \to \mathbb{R}^n$ se ela for derivável em (a, b) e satisfazer o sistema (2.1).

Os sistemas de equações de primeira ordem têm uma elevada importância pois equações de ordem maior podem ser transformadas em tais sistemas através de uma fácil transformação. Por exemplo, o movimento de um determinado sistema mola-massa é descrito pela equação diferencial de segunda ordem

$$u'' + 0,5u' + u = 0. \tag{2.2}$$

A equação (2.2) pode ser escrita como um sistema de equações de primeira ordem. Para fazer isso, considere que $x_1 = u$ e $x_2 = u'$, então $\dot{x}_1 = u' = x_2$, e $u'' = \dot{x}_2$. Substituindo u, u' e u'' na (2.2), obtem-se:

$$\dot{x}_2 + 0,5x_2 + x_1 = 0.$$

Logo x_1 e x_2, satisfazem o seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\left\{ \begin{array}{lcrcr} \dot{x}_1 & = & x_2 & & \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 & - & 0,5x_2 \end{array} \right. . \tag{2.3}$$

De forma análoga, a equação geral de movimento de um sistema mola-massa,

$$mv'' + yv' + kv = F(t)$$

pode ser transformada em um sistema de primeira ordem definindo $x_1 = v$, $x_2 = v'$, ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -(\frac{k}{m})x_1 - (\frac{y}{m})x_2 + \frac{F(t)}{m} \end{cases}.$$

Para transformar uma equação arbitrária de ordem n

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \tag{2.4}$$

em um sistema de n equações de primeira ordem, basta estender o método do exemplo acima. Defindo as variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ por

$$\begin{cases} x_1 & = & y \\ x_2 & = & y' \\ x_3 & = & y'' \\ \vdots \\ x_n & = & y^{(n-1)} \end{cases},$$

segue imediatamente que

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n \end{cases} \tag{2.5}$$

e $\dot{x}_n = y^{(n)}$, ou seja,

$$\dot{x}_n = -a_{n-1}(t)x_n - \cdots - a_1(t)x_2(t) - a_0(t)x_1(t) + f(t). \tag{2.6}$$

Observe que as equações (2.5) e (2.6) são casos particulares do sistema mais geral

$$\dot{x}_1 = F_1(t, x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\dot{x_2} = F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = F_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \tag{2.7}$$

que é equivalente a $\dot{x} = F(t, x)$. Uma solução de (2.7) no intervalo $I : \alpha < t < \beta$ é um conjunto de n funções

$$x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$$

diferenciáveis em todos os pontos do intervalo I e que satisfazem o (2.7) em todos os pontos desse intervalo. Além disso, para algum valor de $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} & = & F(t, x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

forma um problema de valor incial (PVI).

O sistema $\dot{x} = F(t, x)$ será linear se $F_j(t, x), j = 1, \ldots, n$ for linear nas variáveis dependentes $x_1, \ldots x_n$. Caso contrário ele é chamado de não linear. O sistema linear de n equações de primeira ordem:

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \tag{2.9}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)$$

$$x(t_0) = x_0, \;\; x(t) \in \mathbb{R}^n, \; t_0 \in I$$

é chamado de homogêneo se $b_j(t), j = 1, \ldots, n$ for nulo em todo intervalo I, caso contrário ele é não homogêneo.

Teorema 2. *Se as funções $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}, b_1, ..., b_n$ forem contínuas em um intervalo aberto $I : \alpha < t < \beta$, então existirá uma única solução $x_1 = \phi_1(t), ..., x_n = \phi_n(t)$ do sistema (2.9), em que t_0 é qualquer ponto em I e $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$. Além disso, a solução existe em todo o intervalo I.*

Considere o sistema linear homogêneo

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2.10}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ é uma matriz de ordem n e $t \in (\alpha, \beta)$. O resultado a seguir garante que qualquer combinção linear de soluções também é solução para esse sistema.

Teorema 3. *Se as funções vetoriais $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são soluções do sistema $\dot{x} = A(t)x$, então a combinação linear $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ também é solução, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2.*

Para prová-lo, basta derivar $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ e usar o fato de que $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ satisfazem a equação $\dot{x} = A(t)x$ o que é suficiente para mostrar que

$$x(t) = c_1x^{(1)}(t) + ... + c_kx^{(k)}(t)$$

também são soluções, quaisquer que sejam as constantes $c_1, ..., c_k$. Por exemplo:

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \text{ e } x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

são soluções do sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x. \tag{2.11}$$

De acordo com o Teorema 3,

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t) \, \forall \, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

também é solução do sistema (2.11). (BOYCE; DIPRIMA, 2013).

2.1 Wronskiano

Como dito antes, toda combinação linear finita de soluções de (2.10) também é solução, mas será que todas as soluções podem ser encontrada desta maneira? Por analogia com casos anteriores é razoável esperar que para um sistema da forma (2.10) de ordem n seja suficiente formar combinações lineares de n soluções escolhidas apropriadamente.

Sejam então, $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$, n soluções do sistema (2.10) e considere a matriz $X(t)$ cujas colunas são vetores $x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Se o determinante da martriz $X(t)$ for diferente de zero então, as colunas de $X(t)$ são linearmente independentes, para um valor dado de t, esse determinante é chamado de Wronskiano das n soluções $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ e denotado por $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$, ou seja :

$$W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t) = det(X(t)).$$

Sendo assim ,$x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$são linearmente independentes em um ponto se, e somente se, $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ não é zero nesse ponto.

Teorema 4. *Se as funções vetoriais $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções linearmente independentes do sistema $\dot{x} = A(t)x$ em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$, então cada solução $x = \phi(t)$ deste sistema pode ser expressa como uma combinação linear de $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$,*

$$\phi(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \cdots + c_n x^{(n)}(t)$$

de exatamente um modo (BOYCE; DIPRIMA, 2013, p.301).

2.2 Conjunto fundamental de soluções

Todas as soluções de equação $\dot{x} = A(t)x$ podem ser escritas na forma

$$\phi(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \cdots + c_n x^{(n)}(t) \tag{2.12}$$

em que $c_1, \dots, c_n$ são constantes arbitrárias, então a (2.12) inclui todas as soluções do sistema e ela é chamada de Solução Geral do sistema linear $\dot{x} = A(t)x$. Qualquer conjunto de soluções $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ linearmente independente no intervalo $\alpha < t < \beta$ e chamado de *conjunto fundamental de soluções* para este intervalo.

Teorema 5. *Se $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções da equação $\dot{x} = A(t)x$ no intervalo $\alpha < t < \beta$, então $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.*

Pelo Teorema 5 não há a necessidade de examinar o wronskiano das n soluções $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ em todos so pontos do intervalo de interesse e nos permite determinar se $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ forma um conjunto fundamental de soluções, simplesmente calculando seu wronskiano em qualquer ponto conveniente do intervalo.

O próximo resultado garante que o sistema $\dot{x} = A(t)x$ tem pelo menos um conjunto fundamental de soluções (BOYCE; DIPRIMA, 2013, p.301).

Teorema 6. *Sejam*

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}:$$

além disso, suponha que $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ são soluções do sistema $\dot{x} = A(t)x$ satisfazendo as condições iniciais

$$x^{(1)}(t_0) = e^{(1)}, \ldots, x^{(n)}(t_0) = e^{(n)},$$

respectivamente em que t_0 é um ponto qualquer no intervalo $\alpha < t < \beta$. Então $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema $\dot{x} = A(t)x$ (BOYCE; DIPRIMA, 2013, p.302).

2.3 Sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes

Esta seção trata de sistemas de equações linares homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, sistemas da forma

$$\dot{x} = Ax, \tag{2.13}$$

em que A é uma matriz constante de ordem n e seus elementos são números reais.

Se $n = 1$, o sistema se reduz a uma única equação de primeira ordem

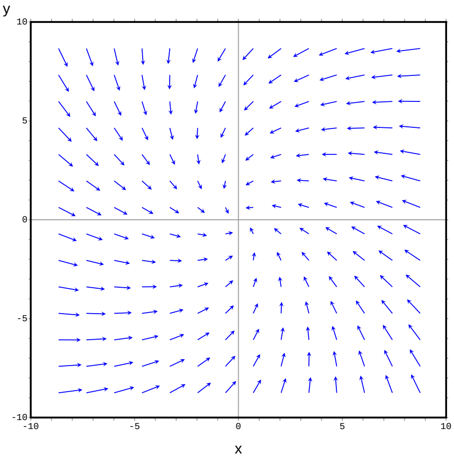
$$\frac{dx}{dt} = ax$$

cuja solução é $x = ce^{at}$ e que $x = 0$ é a única solução de equilíbrio se $a \neq 0$.

Segundo Boyce; DiPrima (2013, p.303) "O caso $n = 2$ é particularmente importante pois permite a visualização no plano x_1x_2, chamado de **Plano de Fase**. Calculando Ax em um grande número de pontos e fazendo o gráfico dos vetores resultante, obtemos um campo de direções de vetores tangentes a soluções do sistema de equações diferenciais."

Veja um exemplo de campo de direções na figura 2.1:

Figura 2.1: Campo de direções



$\dot{x}_1 = -3x_1 - \sqrt{2}x_2$e $\dot{x}_2 = \sqrt{2}x_1 - 2x_2$.
Fonte: Elaborada pelo Autor

A grande utilidade do campo de direções do sistema é que ele fornece uma análise qualitativa do comportamento das soluções sem resolvê-lo e, além disso, podem ser traçadas nele alumas soluções para obter informações mais precisas do sistema, como por exemplo, o campo de direções da figura 2.1 mostra que toda solução que satisfaz a condição inicial (x_1^0, x_2^0) tende ao ponto de equilíbrio $(0, 0)$.

O gráfico contendo uma amostra representativa de trajetórias (soluções) de um sistema dado é chamado de um **Retrato de fase** (ou Trajetória de fase). "Um retrato de fase bem construído fornece informação facilmente compreensível sobre todas as soluções de um sistema bidimensional em um único gráfico" (BOYCE; DIPRIMA, 2013, p.305).

A solução de uma equação diferencial linear com coeficientes constantes apresenta uma exponencial. É natural pensar que o sistema linear com coeficentes constantes $\dot{x} = Ax$ também contenha a exponecial em suas soluções. Com esse intuito considere que

$$x(t) = \xi.e^{rt} \tag{2.14}$$

seja tal solução, em que o expoente r e o vetor ξ devem ser determinados. Para que (2.14), seja uma solução de $\dot{x} = Ax$, ela deverá satisfazer esse sistema, isto é,

$$r\xi_1 e^{rt} = A\xi_1.e^{rt}.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, para todo t, segue que $A\xi_1 = r\xi_1$ é equivalente a

$$(A - rI)\xi_1 = 0 \tag{2.15}$$

em que I é a matriz identidade. Encontrar a solução da equação (2.15), nada mais é do que determinar os autovalores e autovetores associado à matriz A e, desse modo, encontra-se a solução do sistema $\dot{x} = Ax$ que é dada por (2.14). O exemplo a seguir ilustra esse processo de encontrar a solução do sistema via cálculo de autovalores e autovetores da matriz A.

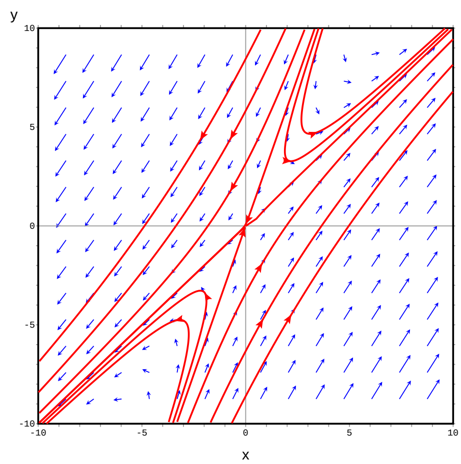
Exemplo 2. Considere o sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x. \tag{2.16}$$

Determine sua solução geral.

Em primeiro lugar observe o campo de direções desse sistema:

Figura 2.2: Trajetória das soluções



Fonte: Elaborada pelo autor

Por essa figura fica fácil vizualizar que uma solução com condição inicial próxima da origem, acaba se afastando dela e aproximando das retas tangentes com coeficientes angulares 1 e 3 no primeiro e no terceiro quadrante.

Para encontrar as soluções do sistema (2.16) considere que $x(t) = \xi e^{rt}$ seja uma solução, isto é, o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

tem uma solução não trivial se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes é igual a zero. Logo os valores de r são encontrados pela equação

$$\begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = (2-r)(-2-r) + 3 = r^2 - 1 = 0$$

são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$. Eles são os autovalores da matriz de coeficientes na (2.16).

Se $r = 1$, o sistema da (2.17) se reduz à equação:

$$\xi_1 - \xi_2 = 0.$$

Logo $\xi_1 = \xi_2$ e o autovetor correspondente a $r_1 = 1$ pode ser escolhido como:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, correspondente a $r_2 = -1$, encontramos que $3\xi_1 = \xi_2$, de modo que o autovetor é

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

As soluções correspondentes da equação diferencial são:

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

O Wronskiano dessas soluções é

$$W\left[x^{(1)}, x^{(2)}\right](t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{vmatrix} = 2$$

que nunca se anula. Portanto, as soluções $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral da (2.16) é

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{2.18}$$

Considerando que $c_2 = 0$ e que a solução do sistema (2.16) é uma trajetória de uma partícula, então ela estará sobre a reta $x_2 = x_1$ no primeiro quadrante se $c_1 > 0$ e no terceiro quadrante se $c_1 < 0$. Em ambos os caso, ela se afasta da origem a medida que t aumenta. Já para $c_1 = 0$ a partícula estará sob a reta $x_2 = 3x_1$ e se aproxima da origem quando o tempo passa.

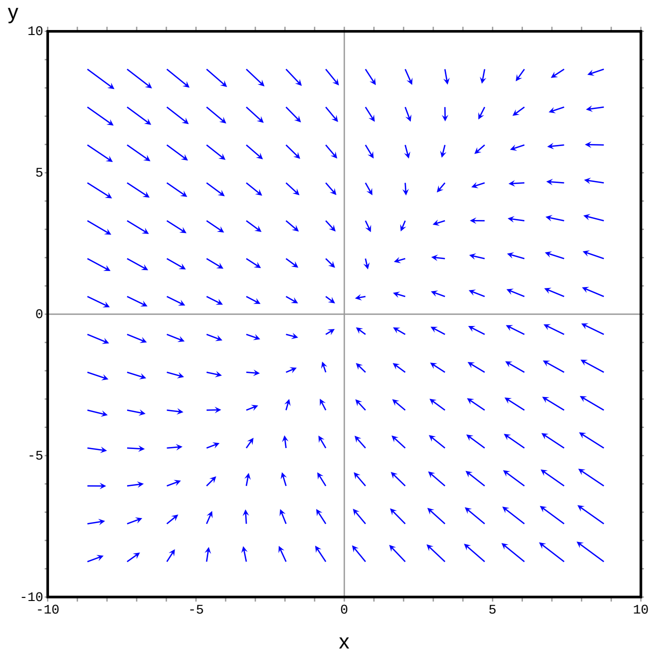
A figura 2.2 mostra o gráfico de diversas soluções. O padrão de trajetória nessa figura é típico de sistemas 2x2 para os quais os autovalores são reais e tem sinais opostos. Nesse caso, a origem é chamada de **ponto de sela**. Ponto de sela são sempre **instáveis** porque quase todas as trajetórias se afastam dele quando t aumenta.

Exemplo 3. Considere o sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} x \tag{2.19}$$

Seu campo de direções é dado pela figura 2.3:

Figura 2.3: Nó estável



Fonte: Elaborada pelo autor

Este campo de direções mostra claramente que todas soluções se aproximam da origem.

Para encontrar as soluções, suponha que $x(t) = \xi e^{rt}$ é uma solução do sistema (2.19). Assim o sistema algébrico:

$$\begin{pmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

tem solução não trivial se

$$(-3-r)(-2-r) - 2 = r^2 + 5r + 4 = (r+1)(r+4) = 0,$$

ou seja, $r_1 = -1$ e $r_2 = -4$.

Para $r = -1$ a (2.20) fica

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\xi_2 = \sqrt{2}\xi_1$, e o autovetor $\xi^{(1)}$ associado ao autovalor $r_1 = -1$ pode ser escolhido como

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, correspondendo ao autovalor $r_2 = -4$, obtém $\xi_1 = -\sqrt{2}\xi_2$, de modo que o autovetor é

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

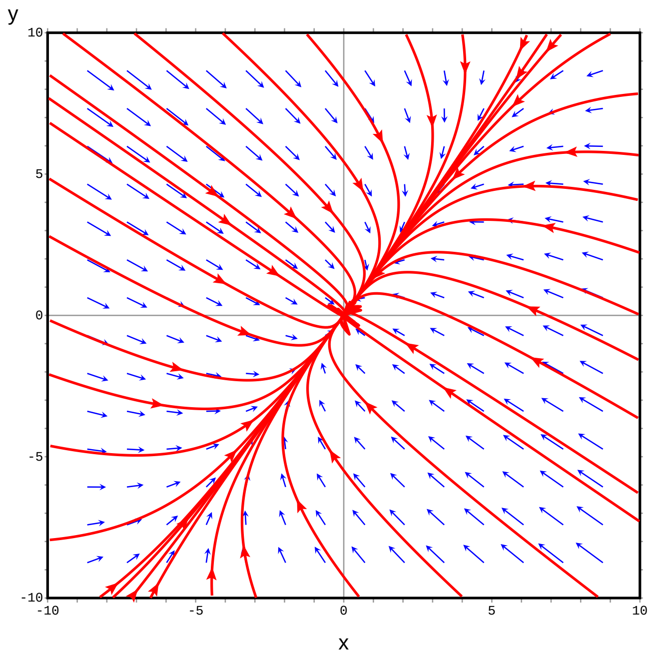
Portanto, um conjunto fundamental de soluções para o sistema (2.19) é

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} \text{ e } x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t},$$

e a solução geral é

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}. \tag{2.21}$$

Figura 2.4: Nó



Fonte: Boyce; Diprima (2013, p. 307)

A figura 2.4 mostra gráficos da solução (2.21) para diversos valores de c_1 e c_2 . A solução $x^{(1)}(t)$ se aproxima da origem ao longo da reta $x_2 = \sqrt{2}x_1$, enquanto a solução $x^{(2)}(t)$ se aproxima da origem ao longo da reta $x_1 = -\sqrt{2}x_2$. As direções dessas retas são determinadas pelos autovetores $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$, respectivamente. Temos, em geral, uma combinação dessas duas soluções fundamentais. Quando $t \to \infty$, $x^{(2)}(t)$ é desprezível em comparação com $x^{(1)}(t)$. Então a menos que $c_1 = 0$, a solução da (2.21) se aproxima da origem, tangenciando à reta $x_2 = \sqrt{2}x_1$. Para tais sistemas a origem é chamada de **"nó"** típico de todos os sistemas de ordem 2 para os quais os autovalores são reais e distintos conforme ilustrado na figura 2.4. No caso de autovalores positivos, em vez de negativos, as trajetórias seriam semelhantes, mas o sentido do percurso seria oposto. Os nós são assintoticamente estáveis se os autovalores forem negativos, e instáveis se forem positivos. (BOYCE; DIPRIMA, 2013. p.308)

A natureza dos autovalores e dos autovetores associados determina a natureza da solução geral do sistema $\dot{x} = Ax$, em especial, determina a estabilidade do ponto de equilíbrio $(0, 0)$. Supondo que A é uma matriz real, existem três possibilidades:

1. Todos os autovalores são reais e distintos entre si.

2. Alguns autovalores ocorrem em pares complexos conjugados (não estudados neste trabalho).

3. Alguns autovalores são repetidos.

Se os autovalores forem reais e distintos, como nos exemplos vistos anteriormente, então existe um autovetor real $\xi^{(i)}$ associado a cada autovalor r_i e o conjunto de n autovetores $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ é linearmente independente e as soluções correspondentes do sistema diferencial $\dot{x} = Ax$ são:

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \ldots, x^{(n)}(t) = \xi^{(n)} e^{r_n t}. \tag{2.22}$$

Para mostrar que essas soluções formam um conjunto fundamental, calcula-se seu Wronskiano:

$$W[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}](t) = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \cdots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \cdots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{pmatrix} = e^{(r_1 + \ldots + r_n)t} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Como a função exponencial nunca se anula e os autovetores $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ são linearmente independentes o determinante da (2.23) é diferente de zero, ou seja, o Wronskiano $W[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}](t)$ nunca se anula. Portanto $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções e, desse modo, a solução geral da equação $\dot{x} = Ax$ é :

$$x(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \ldots, c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}. \tag{2.24}$$

Se A for real e simétrica, mesmo que alguns autovalores sejam repetidos sempre existe um conjunto completo de n autovetores $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ que são linearmente independentes (de fato ortogonais). Portanto, as soluções correspondentes do sistema diferencial $\dot{x} = Ax$ dadas pela (2.22) formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral é dada pela (2.24) (BOYCE; DIPRIMA, 2013, p.308).

O próximo exemplo, encontra-se em Boyce; Diprima (2013, p.309) e apresenta esse caso.

Exemplo 4. Encontre a solução geral do sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x. \tag{2.25}$$

Note que a matriz de coeficientes é real e simétrica.

Os autovalores λ e os autovetores x satisfazem a equação $(A - \lambda I)x = 0$, isto é,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

com

$$det(A - \lambda I)x = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0. \tag{2.27}$$

As raízes da (2.27) são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$. Assim, 2 é um autovalor simples e -1 é um autovalor de multiplicidade algébrica 2, ou um autovalor duplo.

Para encontrar o autovetor $x^{(1)}$associado a um autovalor λ_1, substitua $\lambda = 2$ na (2.26). Isso nos leva ao sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que é equivalente a

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, através de operações elementares sobre as linhas, obtém o autovetor

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = -1$ a (2.26) se reduz imediatamente à única equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{2.28}$$

Ao isolar uma variável da equação (2.28) ela dependerá das outras duas variáveis, por exemplo, se $x_1 = c_1$ e $x_2 = c_2$, então $x_3 = -c_1 - c_2$. Em notação vetorial

$$x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores associado aos seus respectivos autovetores são:

$$r_1 = -1,\ \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$r_2 = -1,\ r_3 = -1;\ \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Portanto um conjunto fundamental de soluções da (2.25) é

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},\ x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},\ x^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

e a solução geral é

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Este exemplo ilustra o fato de que embora um autovalor ($r = -1$) tenha multiplicidade algébrica 2, pode ainda ser possível encontrar dois autovetores linearmente independentes $\xi^{(2)}$ e $\xi^{(3)}$ e então construir a solução geral (2.29).

Considerações Finais

Este trabalho propciou a oportunidade de aplicar diversos conceitos estudados durante o curso de Licenciatura em Matemática, como por exemplo, matrizes e suas operações, sistemas, conceitos de álgebra linear como cálculo de autovalor e autovetor. Além disso, ele aprofundou meus conhecimentos sobre Equações Diferenciais Ordinárias. Neste trabalho foi visto principalmente métodos de resoluções de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes via cálculo de autovalores e autovetores de uma matriz associada ao sistema. A grande importância do método é o fato de ser possível transformar qualquer equação linear de ordem maiores que um em um sistema de equações de ordem um. Foi feito um estudo qualitativo dos gráficos destes sistemas, utilizando o discriminante da matriz dos coeficentes do sistemas, que dependendo dos valores poderia ser nó, sela, centro ou ponto espiral. Este estudo se torna importante para outros trabalhos dentro da área de equações diferenciais, ou até mesmo dentro da, física, engenheria elétrica, química e biologia.

Referências Bibliográficas

[1] BOYCE, Willian; DIPRIMA, Richard. **Equações Diferencias Elementares**. 9.ed. Rio de Janeiro, 2013.

[2] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferencias Aplicadas**. 3.ed. Rio de Janeiro, 2012.

[3] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **ÁLgebra Linear.** 4.ed. Rio Grande do Sul, 2011.