



Licenciatura em Matemática

Edvan Ferreira dos Santos

Matemática e Música na Educação

BIRIGUI - SP
2015

Edvan Ferreira dos Santos

Matemática e Música na Educação

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Birigui, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof.^a M.^a Manuella Aparecida Felix de Lima

Co-orientador(a): Prof.^a Dr.^a Zionice Garbelini Martos Rodrigues

BIRIGUI - SP
2015

SANTOS, Edvan Ferreira dos.

Matemática e música na educação / Edvan Ferreira dos Santos . – Birigui, 2015.

60f.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de São Paulo, Câmpus Birigui.

Orientadores: Manuella Aparecida Felix de Lima e Zionice Garbelini Martos Rodrigues

1. Matemática. 2. Música. 3. Educação Matemática. I. Santos, Edvan Ferreira dos. II. Lima, Manuella Aparecida Felix de. III. Rodrigues, Zionice Garbelini Martos. V. Título.

Edvan Ferreira dos Santos

Matemática e Música na Educação

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Birigui, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Comissão Examinadora



Prof.^a M.^a Manuella Aparecida Felix de Lima



Prof.^a Dr.^a Zíonice Garbelini Martos Rodrigues



Prof. Dr. Régis Leandro Braguim Stabile

Birigui, 14 de dezembro de 2015.

Dedico este trabalho a Conceição Pereira da Silva Santos, Professora e Doutora em Sabedoria, formada na Universidade da Vida. Devo a ela grande parte do que sou.

Agradecimentos

A Deus, agradeço por tudo que vivi e ao crescimento pessoal e profissional adquirido nestes últimos quatro anos, o qual em parte se materializa neste trabalho.

Agradeço também a todas as pessoas que passaram por minha vida neste período. Foram muitos aprendizados, memórias e boas amizades construídas, as quais levarei para toda vida.

Alegria, mais belo fulgor divino,

Filha de Elíseo,

Ébrios de fogo entramos

Em teu santuário celeste!

Teus encantos unem novamente

O que o rigor do costume separou.

Frederich Schiller, 1785.

Resumo

Desde a Antiguidade é possível encontrar indícios de pesquisadores que se dedicam ao estudo das relações entre a Matemática e a Música. No século VI a.C. a escola pitagórica traz o primeiro registro histórico da associação destas duas artes liberais, assim tratadas nesta época, através de experimentos para verificação de relações entre intervalos musicais e razões de números inteiros. A partir disso, ambas estiveram conectadas em diferentes períodos históricos, nos quais seu desenvolvimento se deu de forma integrada. Estudos na área de Educação Matemática, a partir da década de 90, vêm sendo desenvolvidos não apenas com uma preocupação histórica sobre as relações em questão, mas, além disso, com uma visão de que no cenário de fracasso escolar é necessário ensinar e aprender Matemática de forma contextualizada, com metodologias criativas e construtivistas. Este trabalho visa por meio de um levantamento bibliográfico e abordagem qualitativa, investigar as relações entre a Matemática e a Música no que se refere inclusive às possibilidades em âmbito educacional, no ensino e na aprendizagem de conceitos e ideias matemático-musicais.

Palavras-chave: Matemática. Música. Educação Matemática.

Abstract

Since ancient times it is possible to find evidence of researchers who are dedicated to the study of the relationship between mathematics and music. In the sixth century BC the Pythagorean school brings the first historical record of the association of these two liberal arts, as well treated at this time, through experiments to check relations between musical intervals and ratios of integers. From there, both were connected in different historical periods in which development took place in an integrated manner. Studies in mathematics education area, from the 90s, have been developed not only with a historical concern over the relationship in question, but also with a view that the school failure scenario is necessary teaching and learning Mathematics in context, with creative and constructivist methodologies. This work aims through a literature review and qualitative approach to investigate the relationship between mathematics and music as regards including the possibilities in the educational field, in teaching and learning concepts and mathematical-musical ideas.

Keywords: Mathematics. Music. Mathematics Education.

Sumário

Introdução	11
1 Contexto histórico da Matemática e da Música	13
1.1 Pré-história	13
1.2 Antiguidade Clássica	15
1.2.1 Pitágoras de Samos	15
1.2.2 Arquitas de Tarento	16
1.3 Idade Média	17
1.3.1 Cantochão: uma antiga melodia	17
1.3.2 Desenvolvimento da música polifônica	18
1.4 Renascimento em diante	19
1.4.1 Pensadores e suas contribuições	20
1.4.1.1 Galileu Galilei	20
1.4.1.2 Gioseffo Zarlino	20
1.4.1.3 Martin Mersenne	21
1.4.1.4 Johannes Kepler	21
1.4.1.5 René Descartes	22
1.4.2 Temperamento: a busca por uma divisão igual	23
2 Relações entre matemática e música: números em movimento	25
2.1 Razão e proporção	25
2.1.1 Escala musical pitagórica ou diatônica	25
2.1.2 Escala musical de Arquitas	27
2.2 Frequência e som	28
2.3 Divisão rítmica	33
3 Educação Matemática: possibilidades entre a Matemática e a Música	37
3.1 Implicações cognitivas	37
3.2 Um olhar sobre a Legislação Brasileira	39
3.3 Inter, Pluri e Transdisciplinaridade	40
4 Oficinas Didáticas: Relato de Experiência	42
4.1 Caminho percorrido	42
4.2 As Oficinas	44
4.2.1 Pitágoras e o Experimento Musical	45
4.2.2 A Música na Idade Média	47
4.2.3 As Escalas Musicais	48
4.2.4 Os Instrumentos Musicais	48

4.3 Resultados obtidos	50
Considerações Finais	53
Referências Bibliográficas	55
Apêndice A - Planos de aula do Projeto de Iniciação Científica Matemática e Música: Oficinas Didáticas	57

Introdução

O que muitos talvez não saibam, é que desde a antiguidade matemática e música apresentam fortes ligações. Porém, em suas primeiras manifestações, indícios se apresentam de forma isolada. A Matemática se faz presente desde os tempos mais remotos em detrimento à necessidade de contar objetos apresentada, por exemplo, em traços e marcações em pinturas rupestres. A Música, na evidência de instrumentos primitivos, como um osso pré-histórico que apresenta em sua configuração orifícios remetendo a uma flauta. Ao pensar na importância destas duas artes, assim tratadas em nossa concepção, justificamos que a arte Matemática se faz presente em todas as ações humanas, onde o raciocínio lógico matemático é a ferramenta que movimenta as engrenagens da Ciência. A arte Música, não fica para trás, visto a sua importância e presença em diversos cenários da humanidade. O conto de fadas “O Flautista de Hamelin” reescrito pela primeira vez pelos Irmãos Grimm, muito disseminado no universo infantil, narra um acontecimento folclórico que nos faz refletir sobre o poder da Música em nossas vidas. Existem muitas versões deste conto, das quais escolhemos narrar a seguinte:

Era uma vez há muito tempo atrás uma cidade alemã chamada Hamelin que sofria uma grande infestação de ratos. Certo dia, chega à cidade um flautista vestindo uma roupa multicolorida que dizia ter a solução para o problema. Os governantes de Hamelin prometeram-lhe grande recompensa em troca do livramento da peste, uma moeda de ouro pela cabeça de cada rato. Prontamente o flautista aceitou o acordo e ao tocar sua flauta mágica, encantou os roedores, levando-os para longe dali. Apesar do evidente sucesso do flautista, ao regressar, os governantes abjuraram a promessa feita recusando-se a paga-lo, pois o mesmo não havia apresentado as cabeças. Então, o flautista deixou a cidade sem seu pagamento, mas algumas semanas depois, retornou e novamente tocou sua flauta mágica, porém desta vez todas as crianças o seguiram deixando Hamelin com seus opulentos habitantes com celeiros e despensas bem cheios, mas também com um imenso vazio de silêncio e tristeza. E foi isso que se sucedeu há muitos, muitos anos, na deserta e vazia cidade de Hamelin, onde, por mais que se procure, nunca se encontra nem um rato, nem uma criança.

No conto apresentado, vemos claramente o poder inerente à Música no sentido de encantamento e manifestação de sentimentos, como por outro lado, também, a sua não valorização. A alegria da cidade se deu graças a um músico que ao tocar sua flauta atraiu os ratos para longe dali, mas a mesma alegria se foi quando os governantes gananciosos não deram a devida importância a esta arte.

Neste trabalho, objetivamos, por meio de um levantamento bibliográfico e abordagem qualitativa, investigar sobre a relação matemática e música ao responder o seguinte questionamento: **Quais são as ligações entre a Matemática e a Música e suas possibilidades, em âmbito educacional, no ensino e aprendizagem de conceitos e ideias matemático-musicais?**

Além desta pergunta central, outros questionamentos foram levantados em busca dos objetivos específicos da nossa pesquisa, tais como: Quais as contribuições evidenciadas na trajetória histórica que

confirmam a ligação matemática e música? Como explicar conceitos matemáticos significando-os por meio de suas relações com a Música? Existem conexões entre o aprendizado musical e o aprendizado matemático? Como oficinas didáticas sobre matemática e música podem auxiliar na aprendizagem de conceitos e ideias matemáticas? Buscamos responder a estes questionamentos por meio de pesquisa bibliográfica, leituras, reflexão e também nossa experiência na aplicação de oficinas didáticas elaboradas com base nos trabalhos de Abdounur (2006) e Campos (2012) para alunos do ensino médio.

No capítulo 1, com base nos escritos de Boyer (2012), Abdounur (2006), Bennet (1986) e Frederico (1999), mostramos sucintamente como se deu o desenvolvimento da música e da matemática com um olhar histórico partindo da Pré-História até a Renascença, trazendo os pontos mais importantes, os pensadores que contribuíram de forma mais significativa para este desenvolvimento e verificação da importância de ambas as ciências, matemática e música, para seu desenvolvimento mútuo. Sem enaltecer uma ou outra, mas mostrar a importância de cada qual para a evolução do conhecimento humano. A Matemática é vista como uma ciência puramente lógica pertencente ao domínio de intelectuais. Já a Música, uma arte popular, é um elemento que traz prazer, aflora sentimentos, porém apesar da insciência, alicerçada em bases puramente matemáticas. Muitos músicos e até matemáticos sabem deste fato, mas de forma intuitiva.

No capítulo 2 explicitamos as relações matemática e música dividindo-as em três eixos. O primeiro, razão e proporção, onde discutimos e explicitamos os cálculos realizados por Pitágoras na Antiguidade Clássica que, por meio de seu experimento, relacionou o comprimento de uma corda vibrante com razões de números inteiros, também exploramos as contribuições de Arquitas de Tarento. No segundo eixo, frequência e som, discutimos a evolução do sistema de afinação musical pitagórico para o temperado considerando o conceito de frequência e as características do som. Por fim, no terceiro eixo, divisão rítmica, exploramos a matemática do músico estabelecendo uma comparação entre notação musical e a matemática ao explicar sobre as figuras de divisão rítmica por meio da análise de trechos de uma obra musical. Procuramos tornar claras as relações ao matematizar a música e musicalizar a matemática.

O capítulo 3 aborda as possibilidades no que diz respeito à Educação Matemática, por meio da reflexão sobre as implicações cognitivas do ensino de matemática e música, explicitando a teoria das inteligências múltiplas de Gardner (1994) e considerações sobre o efeito da aprendizagem musical no intelecto. Levantamos o que a legislação brasileira diz sobre o ensino deste tema recorrendo à Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, além dos Parâmetros Curriculares Nacionais das disciplinas Matemática e Arte. Também refletimos sobre o conceito de disciplina e os enfoques didáticos que favorecem a abordagem dos conhecimentos no âmbito da Matemática e da Música.

No último capítulo compartilhamos nosso relato de experiência com o Projeto Institucional de Iniciação Científica Voluntária desenvolvido com o objetivo de verificar a contribuição de oficinas didáticas sobre matemática e música para o aprendizado de ideias e conceitos matemáticos em uma turma da terceira série do ensino médio. Relatamos o caminho percorrido desde a elaboração do projeto até sua execução, os conteúdos abordados em cada uma das quatro oficinas elaboradas além dos resultados obtidos.

Concebemos este trabalho considerando a contribuição para a religação de saberes desde muito tempo conectados, mas que com o pensamento disciplinar hiperespecializado se separaram. Esta religação sugerida pela grande parte dos pesquisadores do assunto vem no sentido de ressignificar o conhecimento matemático, trazendo a afetividade que a música por si só contempla de forma amplamente satisfatória. No cenário onde um professor de matemática se encontra face com a desmotivação dos alunos em aprender esta disciplina, significações de conteúdos por meio de sua relação com a música, podem ser uma solução para este problema.

Capítulo 1

Contexto histórico da Matemática e da Música

Um olhar histórico sobre os fatos decorrentes da construção dos conhecimentos sobre matemática e música possibilitam a visualização da importância de cada área para seu desenvolvimento mútuo, onde cada qual, desde seu primeiro contato e com suas características específicas aproximou pensadores, teóricos, músicos, matemáticos e cientistas em busca de explicações para efeitos sonoros e de um sistema de afinação musical adequado às necessidades apresentadas. Expomos neste capítulo um tratamento sucinto sobre a construção das relações que abrangem nosso tema de trabalho da Pré-história ao Renascimento.

1.1 Pré-história

Neste período tão remoto da história da humanidade, registros encontrados são demasiado complexos para se avaliar assertivamente seus significados. A bibliografia que trata sobre a história da Matemática e da Música traz muito pouco material sobre este período, justamente por esta dificuldade e complexidade relatada. Mesmo assim, é possível especularmos e ter uma ideia básica de como iniciaram a Matemática e a Música. Ambas possuem suas origens na percepção e relacionamento do ser humano com seu ambiente. Na Música, supõe-se que o ritmo antecedeu o som, com o andar, correr, lascar uma pedra na construção de uma ferramenta ou executar qualquer outra tarefa com exigência de movimentos repetitivos; com a percepção destes fatores imagina-se que houve o descobrimento da noção de compasso¹. Os instrumentos musicais mais primitivos se apresentaram no próprio corpo humano, “como a garganta e a boca já produziam uma melodia, juntou-se o estalar de dedos, palmas, até que braços e pernas acabaram produzindo uma *música corporal* rítmica.”(FREDERICO, 1999, p. 7, grifo do autor) Já na Matemática, a percepção, assim como no caso da Música, nos mostra como um possível surgimento da primeira ideia de número, a qual poderia estar relacionada com a observação de contrastes; por exemplo ao observar uma alcateia em oposição a um único lobo ou a diferença exorbitante entre o tamanho de uma sardinha em contraste com o de uma baleia traz neste homem pré-histórico uma noção do que mais tarde chamou-se de número. (BOYER, 2012) Em seguida surge a necessidade de contar objetos, visto que o homem sai de uma condição nômade e extratora, para residente e produtor de seus suprimentos. O uso das mãos, dedos e pés eram de grande valia para representar a correspondência entre os objetos contados e nos faz pensar também sobre a origem do nosso sistema de numeração, que hoje assume a base dez.

¹Compasso na notação musical é uma forma de dividir quantitativamente em grupos os sons de uma composição musical em tempos de duração iguais. A soma dos valores rítmicos dentro de um compasso, determinam a duração de tempo definida. Detalharemos com mais amplitude seu significado e implicações no capítulo 2, seção 3.

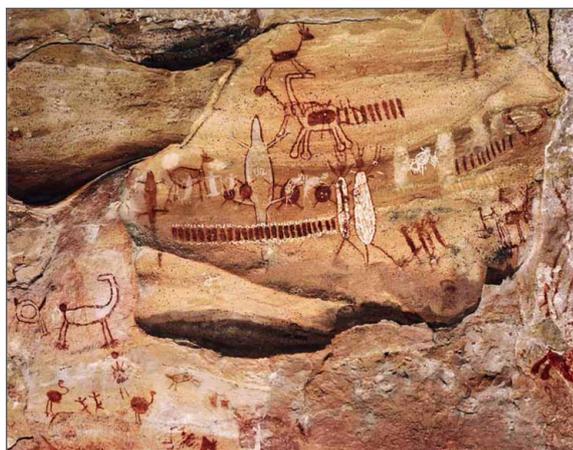
Como Aristóteles observou há muito tempo, o uso hoje difundido do sistema decimal é apenas resultado do acidente anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e nos pés (BOYER, 2012, p.24).

Admite-se que o pensamento matemático abstrato dependeu essencialmente do desenvolvimento da linguagem, mas os termos que denotavam ideias numéricas não surgiram tão rapidamente. Acredita-se que os sinais para números antecederam as palavras para números, pois existe uma grande diferença, em termos de complexidade, entre fazer incisões em um bastão, osso, ou riscos em uma pintura rupestre (Figura 1.1) e formular uma frase bem estruturada para caracterizar um número (BOYER, 2012).

Supõe-se que a Música se materializou na construção de instrumentos musicais. Vestígios arqueológicos mostram a flauta como um dos instrumentos mais antigos, senão o mais antigo. Já foram encontrados vários tipos de flauta de diversos materiais, como osso, madeira ou até cascas de frutas, que após secas deixavam concavidade oca em seu interior e ao serem sopradas produziam um som musical². (ARAÚJO, 1999) Para reforçar nossa ideia, chamamos a atenção para uma recente descoberta feita pelo arqueólogo Nicholas Conard, o qual seu estudo publicado na revista *Nature* traz flautas datadas de aproximadamente 35 mil anos, uma delas consiste em um osso de abutre no qual foi entalhado cinco furos (Figura 1.2), o que sugere uma preocupação matemática de nossos ancestrais quanto à confecção e quantidade de sons diferentes que este instrumento deveria produzir para satisfazer suas necessidades musicais. Segundo Conard, a música era usada em vários cenários sociais, possivelmente no religioso ou recreativo, semelhante à maneira como a música é usada hoje, em várias situações.

Difícilmente conseguiremos estabelecer e mapear com certeza os fatos deste período, mas as noções apresentadas são suficientes para compreender e atender os objetivos deste trabalho. Os vestígios arqueológicos estão em contínuo estudo e quem sabe, em um futuro próximo, possamos entender com mais propriedade como se deu o desenvolvimento de nossos conhecimentos e artes.

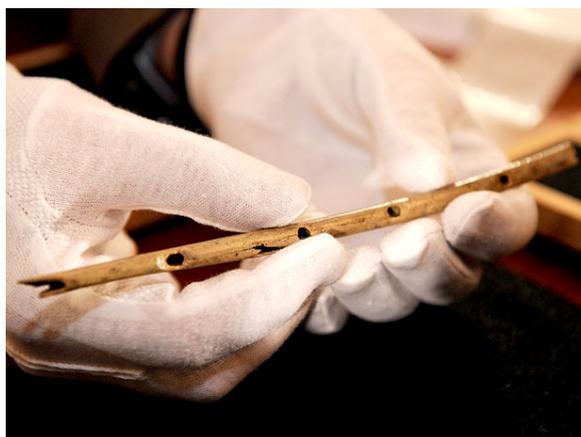
Figura 1.1: Nicho Policrômico - Toca do Boqueirão da Pedra Furada na Serra da Capivara - Piauí



Fonte: Associação de Arte Rupestre ABAR (2006)

²Entendemos neste contexto, som musical, como um som com altura (agudo ou grave), timbre e intensidade definidos, características do som de uma flauta, por exemplo.

Figura 1.2: Flauta pré-histórica feita de osso de abutre

Fonte: Revista *Nature*

1.2 Antiguidade Clássica

Nesta seção, daremos enfoque à escola pitagórica que traz como principais teóricos musicais Pitágoras e Filolaus, no período pré-clássico; bem como Árquitas, Aristoxeno e Aristóteles, no período clássico (Fallas, 1992, p.266 apud ABDOUNUR, 2006).

1.2.1 Pitágoras de Samos

Pitágoras, sábio, intelectual, filósofo, profeta, místico, matemático, nascido em Samos, uma ilha grega do mar Egeu, viveu entre ca. 571 a. C. - 570 a.C. — 500 a. C. - 490 a.C., é uma figura muito amistosa na ciência devido suas contribuições na matemática, música, astronomia e filosofia. Sabe-se que Pitágoras realizou muitas peregrinações, das quais incorporou conhecimentos não apenas matemático, mas também sobre astronomia e até religião. A propósito, foi contemporâneo de Buda, Confúcio e Laozi (Lao Tsé). Em seu retorno à Grécia, se radicou em Crotona, Magna Grécia, que é hoje a costa sudeste da Itália, onde instituiu uma sociedade secreta um tanto semelhante a um culto órfico³, com a exceção de suas bases que eram matemáticas e filosóficas. O lema da escola pitagórica era “Tudo é número”, além de que as relações numéricas mais simples eram mais valorizadas pelos pitagóricos. Há uma certa obscuridade sobre o sábio grego que se justifica em parte pela ausência de documentos da época que foram perdidos. Outra dificuldade encontrada reside no fato de que a ordem fundada por ele era comunitária e secreta e isso acarretava que as descobertas poderiam ter sido realizadas por qualquer membro, mas eram sempre atribuídas ao líder, no caso, Pitágoras (BOYER, 2012).

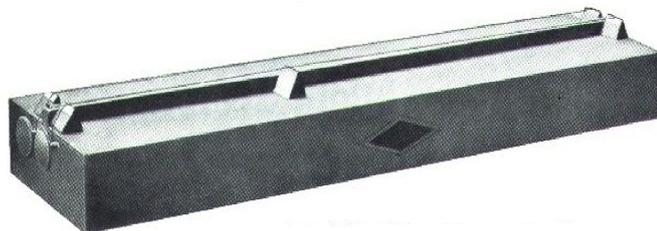
Segundo Abdounur (2006), as primeiras ligações entre matemática e música datam de VI a.C., quando Pitágoras revela o quarto ramo da matemática, a música. Ele realizou experiências com números e sons utilizando o monocórdio, antigo instrumento musical de uma única corda, estendida sobre uma caixa de ressonância, presa a dois cavaletes fixos e com um cavalete móvel para dividir a corda em duas seções (Figura 1.3), em busca de relações entre o comprimento de uma corda vibrante e razões de números inteiros.

Nesta experiência, o pensador grego descobriu que ao reduzir uma corda a $\frac{3}{4}$ do seu tamanho original e tocando-a, ouvia-se uma quarta – quatro notas acima na nota inicial; de forma análoga, ao tocar $\frac{2}{3}$ do tamanho original da corda ouvia-se uma quinta; e, $\frac{1}{2}$, uma oitava. Estas razões, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$

³Conjunto de crenças e práticas religiosas greco-helenistas.

e $1/2$ representam as consonâncias pitagóricas, pois ao combinar o som produzido por elas com o som da corda em seu tamanho original, tem-se uma combinação sonora agradável ao ouvido humano⁴.

Figura 1.3: Monocórdio



Fonte: Internet

1.2.2 Arquitas de Tarento

Matemático pitagórico, filósofo, cientista, astrônomo grego, nascido em Tarento, uma das principais cidades da Magna Grécia, viveu entre 428 a.C. — 347 a.C. Tinha menos afincos religioso e místico que Pitágoras e Filolaus, escreveu sobre a aplicação das médias aritmética, geométrica e subcontrária à música, sendo atribuída a ele a mudança do nome “média subcontrária” para “média harmônica”:

[...]provavelmente pelo fato do comprimento relativo ao intervalo de quinta - $2/3$ da corda inteira -, de grande valor harmônico para os gregos, ser a média subcontrária entre o comprimento da corda solta - inteira - e aquele correspondente à oitava - metade da corda -, intervalo consonante fundamental (ABDOUNUR, 2006, p.15).

Seu envolvimento com música foi muito maior que de seus precursores, e, para ele, essa deveria ter um papel mais relevante que a literatura na educação de crianças (ABDOUNUR, 2006). Tanto que estabeleceu o quadrivium matemático, que consiste nas disciplinas ou artes liberais, assim chamadas na época, que todo cidadão deveria estudar. No quadrivium matemático, encontram-se: Aritmética, tida como o estudo dos números em repouso, fundamentada em cálculos aritméticos; Música, entendida como o estudo dos números em movimento, na questão da combinação de ritmos e sons isso fica bastante claro; Geometria, o estudo das grandezas em repouso, incluindo cálculo de áreas, relações métricas, etc.; e, por fim, Astronomia, o estudo das grandezas em movimento, por exemplo, posições e disposição de astros. Na organização das artes liberais (Figura 1.4), podemos observar que a música tinha um papel muito importante, e diferentemente de hoje era tida não apenas como uma arte, mas como uma ciência, a ciência dos números em movimento.

Figura 1.4: Organização Artes Liberais na Antiguidade Clássica

ARTES LIBERAIS						
TRIVIUM			QUADRIVIUM			
GRAMÁTICA	RETÓRICA	DIALÉTICA	ARITMÉTICA	MÚSICA	GEOMETRIA	ASTRONOMIA

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Boyer (2012)

Desta forma, considera-se que o notável papel desempenhado pela matemática desde a antiguidade clássica na educação, se deve em grande parte a Arquitas (BOYER, 2012). O pensador tarentino possivelmente foi o primeiro a falar sobre o conceito de frequência em música, o qual sua justificativa era ilustrada pela afirmativa referenciada com o exemplo do som provocado por um vento forte, caracterizado

⁴Detalharemos este experimento no próximo capítulo.

como um som agudo em contraposição ao vento fraco que produzia um som grave (ABDOUNUR, 2006). Assim,

[...]sons diferenciavam-se de acordo com suas velocidades no meio, de modo que o agudo dependia de uma velocidade mais alta que o grave. [...] Nesse sentido Arquitas prenuncia a relação de frequência com altura musical, reconhecidamente explicada por Galileu em 1638 (Dostrovsky, S., Bell, J.F. & Truesdell, C., 1980, p.665) ” (ABDOUNUR, 2006, p.16)

Destacamos, também, que o intervalo de terça maior obtido por Arquitas concorda com o presente na série harmônica. Este fato nos faz imaginar que ele pudesse ter ouvido absoluto⁵, pois percebeu que a terça correspondente a $4/5$, média harmônica entre primeira (razão 1) e quinta (razão $2/3$), era mais baixa que a terça pitagórica, $64/81$, e que soava mais natural, já que se incorporava dentro dos harmônicos naturais de uma nota. Ao passo que Pitágoras calculava as razões correspondentes à escala utilizando apenas ciclos de quintas, Arquitas considerava categoricamente cálculos de médias aritméticas e harmônicas na geração de seu sistema musical. O que revela um pensamento extremamente proporcionalista, pois subdivide de outra forma as relações de comprimentos relativas à escala pitagórica, e “obtem diferentes razões tais como $(4/5)$ correspondente ao intervalo de terça, outrora associado a $(64/81)$ por Pitágoras” (ABDOUNUR, 2006, p.17).

1.3 Idade Média

Na Idade Média, a música tinha como sistema de afinação principal o pitagórico, o qual, mesmo apresentando alguns problemas posteriormente descobertos (no decorrer desta utilização, conforme será mostrado), permaneceu como a regra musical deste período. Entre os pensadores que mais se destacaram no período medieval, no sentido de sistematização da música, está o cidadão romano e escritor Boetius (480-524 d.C.). Seu escrito sobre matemática - aritmética, música, geometria e astronomia, lógica, teologia e filosofia; intitulado *De Institutione Musica*, considera a música como uma força que impregnava todo o universo e um princípio unificador tanto do corpo e alma do homem quanto das partes de seu corpo. Obra de teoria musical mais disseminada na Idade Média, seu tratado ainda se apoia na doutrina pitagórica das consonâncias musicais e o princípio da divisão do monocórdio (Dadie, 1988, p.117, apud ABDOUNUR, 2006, p. 21). Um destaque maior damos ao fato de que a música sofre mudanças substanciais, as quais a fazem partir de uma concepção extremamente melódica⁶, e simples, com destino a uma forte presença harmônica⁷. Assim a música evolui de uma condição monofônica (música sem acompanhamento, melódica) para polifônica, a qual exemplificaremos a seguir.

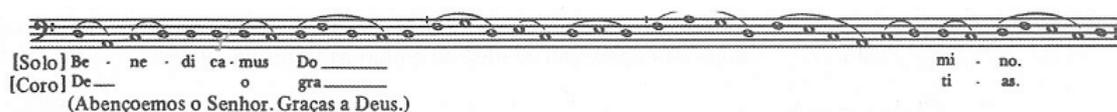
1.3.1 Cantochoão: uma antiga melodia

É a música mais antiga que se tem registros, século VIII, tanto sacra como profana, consiste em uma melodia que fluía de forma livre com ritmos irregulares de acordo com as acentuações das palavras cantadas, no ritmo natural do latim, base do canto desta música. “Ainda hoje, em muitas igrejas e abadias, o cantochoão é usado normalmente” (BENNETT, 1986, p.13). Mostramos a seguir o exemplo de cantochoão “Benedicamos Domino” (Abençoemos ao Senhor), que ilustra este tipo de música, em apenas uma linha melódica, sem a presença de ritmo definido, as frases são cantadas:

⁵Ouvido absoluto é a capacidade que uma pessoa tem de formar uma imagem auditiva interna de qualquer tom musical marcado por um símbolo apropriado (nota, letra) de modo que se possa naturalmente identificar qualquer tom acusticamente apresentado e, mais raramente, cantar qualquer tom de memória, sem referências externas.

⁶Melodia é uma sucessão coerente de sons e silêncios, que se desenvolvem em uma sequência linear com identidade própria. É a voz principal que dá sentido a uma composição e encontra apoio musical na harmonia e no ritmo. Na notação musical ocidental a melodia é representada no pentagrama de forma horizontal para a sucessão de notas musicais e de forma vertical para sons simultâneos.

⁷Harmonia é o campo que estuda as relações de encadeamento dos sons simultâneos.

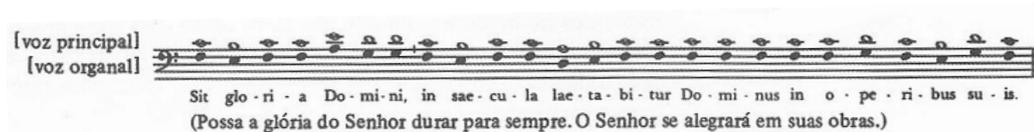
Figura 1.5: Excerto de cantochão - *Benedicamus Domino*


[Solo] Be - ne - di - ca - mus Do _____ mi - no.
 [Coro] De _____ o gra _____ ti - as.
 (Abençoemos o Senhor. Graças a Deus.)

Fonte: Bennet (1986, p.13)

1.3.2 Desenvolvimento da música polifônica

O *organum paralelo*, datado do século IX, é a primeira música polifônica, que apresenta duas ou mais linhas melódicas compostas em conjunto. O objetivo de acrescentar mais linhas de vozes era acrescentar beleza e refinamento às músicas. As composições neste estilo são chamadas *organum*⁸, sendo sua forma mais antiga o *organum paralelo*, que tem este nome devido à voz adicionada ter o papel apenas de duplicação da voz principal, seguindo-a de forma paralela em intervalos inferiores aos de quarta e quinta. “Esse som, um tanto rígido e despojado, freqüentemente era enriquecido por meio da duplicação de uma ou ambas as vozes na oitava” (BENNETT, 1986, p.14). Um exemplo de *organum paralelo*:

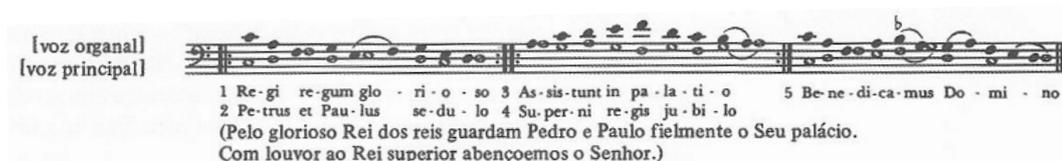
Figura 1.6: Excerto de *organum paralelo*


[voz principal]
 [voz organal]
 Sit glo - ri - a Do - mi - ni, in sae - cu - la lac - ta - bi - tur Do - mi - nus in o - pe - ri - bus su - is.
 (Possa a glória do Senhor durar para sempre. O Senhor se alegrará em suas obras.)

Fonte: Bennet (1986, p.14)

Nos séculos X e XI as composições gradualmente se libertaram da condição onde a voz organal era cópia fiel da principal. Então surge o *organum livre*, um novo tipo de *organum*, onde, além do movimento paralelo, havia os movimentos contrário (elevando-se quando a voz principal baixava e vice-versa), oblíquo (conservando-se fixa enquanto a voz principal se movia) e direto (seguindo a mesma direção da voz principal, mas separada desta não exatamente pelos mesmos intervalos). “No ‘*organum livre*’, a voz organal já aparece escrita acima da voz principal. É feita no estilo nota contra nota, mas observe que, na peça mostrada abaixo, há três ocasiões em que a parte da voz organal tem duas notas para cantar contra uma única da voz principal” (BENNETT, 1986, p.14, grifo do autor).

Um exemplo de *organum livre*:

Figura 1.7: Excerto de *organum livre*


[voz organal]
 [voz principal]
 1 Re - gi re - gum glo - ri - o - so 3 As - sis - tunt in pa - la - ti - o 5 Be - ne - di - ca - mus Do - mi - no
 2 Pe - trus et Pau - lus se - du - lo 4 Su - per - ni re - gis ju - bi - lo
 (Pelo glorioso Rei dos reis guardam Pedro e Paulo fielmente o Seu palácio.
 Com louvor ao Rei superior abençoemos o Senhor.)

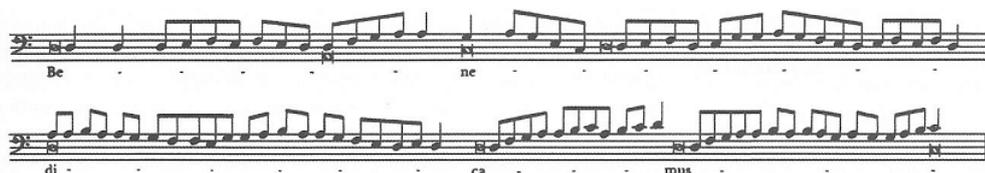
Fonte: Bennet (1986, p.14)

No *organum melismático* há um completo abandono do estilo nota contra nota, substituído por um estilo onde a voz principal se estabelece em notas longas e graves, chamada tenor, em contraposição

⁸ Plural de *organum*.

a uma mais aguda, que se movia livremente cantando um grupo melodioso de notas, chamado *melisma*, daí o nome *melismático* (BENNETT, 1986). Um exemplo ilustrado:

Figura 1.8: Excerto de *organum* melismático - *Benedicamus Domino*



Fonte: Bennet (1986, p.15)

No século XIII, surge uma nova forma de composição, onde os organa passaram a se chamar *clausula* e tinham geralmente duas vozes, dando origem a um novo tipo de música popular, chamada **moteto**. A clausula geralmente advinha de um *organum*, a qual era acrescentada uma terceira voz, dando origem ao *triplum*, escrita com notas mais rápidas e um texto independente, às vezes até em outra língua. “É típica da Idade Média essa forma de construção musical em camadas, por vezes resultantes do trabalho de diferentes compositores” (BENNETT, 1986, p.17). Abaixo, mostramos a abertura de um moteto do século XIII, baseado numa *clausula* de *organum* de duas vozes. Inicialmente foi um *duplum* (duas vozes), composto com as tristes palavras de um poema amoroso, em seguida transformado em um *triplum* (três vozes), com as palavras de outro poema, este já um pouco mais alegre. Ambos estão em francês.

Figura 1.9: Moteto - *Pucelete - Je languis - Domino*

Moteto: *Pucelete - Je languis - Domino* (meados do século XIII)

Triplum
 Pu-ce-le - te belet a - ve - nant Jo - li - et e, polie et plei - sant, La sa - de - te que je de - sir tant
 Darling girl so fair and beauti - ful, Pretty one a - gree - a - ble and sweet She's the treasure that I so de - sire.

Duplum (moteto)
 Je lan - guis des maus d'a - mours, Mieux aim as - sez qu'il m'o - ci - e
 I suf - fer the trials of love. I think that I should be bet - ter dead.

Tenor
 Domino
 Menina bela e amável/ mimosa, gentil e doce/ tesouro que tanto desejo.
 Sofro as penas d'amor/ queria muito mais estar morto.

Fonte: Bennet (1986, p.17)

1.4 Renascimento em diante

Nesta seção, nos embasaremos majoritariamente no escrito de Abdounur (2006), pois traz um excelente trabalho no sentido de caracterizar os fatos e pensadores que contribuíram para o desenvolvimento da matemática e música a partir do Renascimento.

O Renascimento é caracterizado, na perspectiva musical, como a evolução da polifonia, essa definida como a superposição de melodias que trouxe como consequência o desenvolvimento da harmonia, o estudo da combinação de sons. Na perspectiva da ciência/matемática, o panorama apresentado neste período se caracteriza por processos de matematização, experimentação e mecanização. A Revolução Científica nos séculos XVI e XVII favoreceu a ânsia por interpretações e argumentações inovadoras,

contrapondo-se a preceitos aristotélicos, que possuíam caráter fundamentalmente qualitativo, assim, ao propor aos fenômenos naturais interpretações baseadas em fórmulas e teorias matemáticas, a ciência sai da condição qualitativa para quantitativa, a qual prima por exatidão. Ludovico Fogliani (1470-1558) foi o teórico musical que mais se destacou na época por meio de sua obra *Inztituizioni Armonique* (1558), a qual foi a base da educação científico cultural em toda Europa durante dois séculos. Em seguida, encontram-se Francisco Salinas (1513-1590) e Marin Mersenne (1588-1648), o qual se dedicou à acústica e foi o primeiro a estruturar o estudo da harmonia no que concerne à ressonância⁹.

1.4.1 Pensadores e suas contribuições

1.4.1.1 Galileu Galilei

Galileu (1564-1642), no século XVII, apresentou a ideia de que a altura musical se relaciona diretamente ao conceito de frequência ao observar um experimento que consistia em registrar rastros de arranhões, desenhados em uma placa de metal, provenientes de uma haste vibrante conectada à uma membrana que recebia vibrações sonoras. Este fato marcou o início da física do som em sua concepção atual.

Tal ideia motivou esforços para o entendimento dos harmônicos musicais, já que durante este século parecia paradoxal – a princípio por parte de Mersenne – que um simples objeto pudesse vibrar simultaneamente em diferentes frequências. A explicação quantitativa de timbre assim como a de harmônicos associados ao timbre também ocorre nesse período (ABDOUNUR, 2006, p.29).

O som, agora entendido como onda e ligado ao conceito de frequência, ganhou uma nova dimensão que o possibilitou ser estudado por meio da teoria ondulatória desenvolvida por Huygens (1627-1695), algo muito significativo no que diz respeito à interação matemática e música, pois ao compreender a natureza do som, é possível entender, representar e manipular melhor os fenômenos musicais. Huygens também estudou sobre a falha do temperamento desigual, um exemplo é a escala pitagórica, onde um ciclo de oitavas não coincide com um ciclo de quintas, que motivou a busca pelo temperamento igual.

1.4.1.2 Gioseffo Zarlino

Compositor e grande teórico musical, Zarlino (1517-1590) nasceu em Chioggia nas redondezas de Veneza, Itália. Apresentou grande preocupação com a razão das consonâncias perfeitas mostrando-se pioneiro no reconhecimento da tríade harmônica¹⁰. Ele também designou métodos para a divisão do braço de um instrumento de corda em doze semitons iguais, utilizando-se de médias geométricas (MERSENNE, 1957, p.234 apud ABDOUNUR, 2006).

Entre suas contribuições, destacamos a sua versão proposta da gama diatônica, que consistiu em utilizar proporções derivadas da Série Harmônica. A gama de Zarlino pode ser expressa em termos de razão, sem perda de generalidade, e tomando a nota DÓ como inicial, em:

Figura 1.10: Escala musical Justa ou de Zarlino em termos de razão

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
1	8/9	4/5	3/4	2/3	3/5	8/15	1/2

Fonte: Abdounur (2006, p.46)

⁹Repercussão de sons.

¹⁰Conjunto de três notas musicais que estruturam a formação de um acorde, que por sua vez é caracterizado como qualquer conjunto harmônico de três ou mais notas soando simultaneamente.

Ao fazer um paralelo entre Zarlino e Pitágoras, verificamos que o primeiro obtinha os intervalos musicais não apenas pelo procedimento de superposição de quintas, mas também realizando adições e subtrações aos intervalos, porém, nunca os invertendo.

A respeito das consonâncias e dissonâncias, Zarlino e seus precursores entendiam as dissonâncias como cortes momentâneos no processo harmônico, os quais geravam uma variedade ou contraste que realçava a perfeição apresentada pelas consonâncias.

Nas palavras do mestre italiano, a dissonância motiva a consonância, que a segue com o intuito de produzir maior satisfação auditiva. Após a dissonância, o ouvido capta e aprecia a consonância com maior prazer, assim como a luz é mais encantadora à vista após a escuridão (Lester, 1994, p.20) e a doçura é melhor apreciada e palatável após o amargor (Castanha, s/d, p.3). Se uma dissonância ofende o ouvido por certo intervalo de tempo, a consonância que se segue torna-se mais doce e aceitável (Castanha, s/d, p.3) (ABDOUNUR, 2006, p.46).

1.4.1.3 Martin Mersenne

Monge franciscano de um mosteiro em Paris, além de filósofo, matemático e músico teórico, Mersenne (1588-1648) assumiu um papel fundamental nos movimentos científicos da época, e dedicou sua produção majoritariamente à ciência, teoria e prática musical. Influenciou, incisivamente, a Filosofia na primeira metade do século XVII, desviando seu empenho teológico durante a maturidade. Ele acreditava que a Música era suscetível à explicação racional mediante análise científica e atribuía tamanha importância, que a comparava com outras disciplinas em seu potencial para área de pesquisa acadêmica. Sobre o tema acústica, propôs questões primordiais como por exemplo, a aparente incoerência sobre uma nota vibrar em várias frequências ao mesmo tempo, sugerindo estudos mais criteriosos a respeito dos harmônicos. Baseou-se na obra de Zarlino e concordava que a dissonância tinha função apenas ornamental em uma composição. Portanto, assumiu importante papel no desenvolvimento da matemática e música.

Sua obra, *Harmonie Universelle* (1636), versa sobre distintos experimentos e estudos sobre o som, além de considerações acerca da relação matemática e música. Apresenta observações gerais sobre as leis que regem a vibração de uma corda esticada relacionando a diminuição da frequência com suas características físicas. Aborda inclusive, teoria, execução e composição musical além de uma classificação de instrumentos musicais, onde considerava o monocórdio como fundamental para a compreensão de toda a ciência musical, pois para ele esta ciência seria alcançada por meio da explicação de todos os modos de divisão do monocórdio. Apesar de tudo, a obra de Mersenne apresenta algumas divagações como exemplo “a comparação entre razões de consonâncias e propriedades das estrelas em relação à Terra, chamando atenção para o perigo envolvido para a aceitação da teoria de Kepler da Harmonia das Esferas” (ABDOUNUR, 2006, p.61).

Ao dividir a oitava em doze semitons iguais, obteve um monocórdio composto por onze números irracionais, os quais resultaram de médias proporcionais. Este fato já demonstra sua preocupação com o temperamento igual, que consiste em nosso atual sistema de afinação.

1.4.1.4 Johannes Kepler

Natural de Weil, Alemanha, Kepler (1571-1630) foi um matemático, filósofo e astrônomo que além de um valioso legado em Física, com a formulação de leis para os movimentos dos planetas, apresentou também contribuições para a ciência musical. Destacamos sua obra *Harmonia Mundi* (1619) composta por cinco livros dos quais o quinto trata de sua teoria “*Harmonia das Esferas*”, que consiste em um modelo musical que considera a existência de intervalos musicais inerentes a cada planeta, e que

soavam como se estes cantassem simples melodias, relacionando para isso as velocidades de rotação dos planetas com suas frequências emitidas.

Procurando na natureza e em suas leis uma demonstração da sublimidade de Deus e buscando ainda desvendar a harmonia subjacente aos fenômenos causuísticos, o astrônomo imperial considerava o movimento dos planetas uma música que traduzia a perfeição divina (Cartier, 1995, p. 750) (ABDOUNUR, 2006, p.46).

Kepler esforçou-se em explicar a variação de velocidade de um planeta por meio de uma representação musical, a fim de atestar sua Segunda Lei, que versa sobre a velocidade dos planetas de acordo com a sua distância do Sol. Partindo do pressuposto que movimentos lentos e rápidos estão associados respectivamente a notas graves e agudas¹¹, ele conjecturou que a razão das velocidades do periélio e afélio de cada planeta determinaria um intervalo musical próprio. Tomando como exemplo as velocidades do periélio e afélio de Saturno, respectivamente 135 e 106 arcos de segundo por dia, teremos uma razão de $135/106 = 5/4$ que corresponde ao intervalo de terça maior. Os intervalos de outros planetas, a menos por diferenças ínfimas do ponto de vista musical, revelam-se segundo Kepler (1977) apud Abdounur (2006) como:

Saturno 4/5 (terça maior)
 Júpiter 5/6 (terça menor)
 Marte 2/3 (quinta)
 Terra 15/16 (semitom)
 Vênus 24/25 (diese)
 Mercúrio 5/12 (terça menor composta)

Ao fazer estas correspondências entre as distâncias médias dos planetas ao Sol e as razões de frequências em uma escala musical, o astrônomo alemão conecta ainda mais a Matemática com a Música.

1.4.1.5 René Descartes

Matemático e filósofo francês, Descartes, La Haye (1596-1650) trouxe contribuições no sentido de tentar explicar as dissonâncias em termos matemáticos em sua obra *Compendium Musicae* (1618), a qual apresenta, inclusive, um grande número de diagramas e tabelas matemáticas que ilustram as relações proporcionais envolvidas em vários intervalos musicais. Destacamos também que

¹¹Tomemos o exemplo de ventos fracos e fortes, que produzem respectivamente sons graves e agudos.

[...] Descartes estabeleceu no *Compendium Musicae* uma teoria generalizada para os sentidos, através de preliminares em forma axiomática, descritas a seguir:

I - Todos os sentidos são capazes de experimentar prazer

[...]

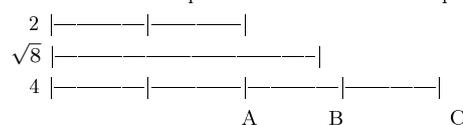
IV - Os sentidos percebem um objeto mais facilmente quando a diferença das partes é menor.

V - Nós podemos dizer que as partes de um objeto todo são tanto menos diferentes quanto maior a proporção entre elas.

VI - Essa proporção deve ser aritmética e não geométrica, pois no primeiro, há menos a perceber, já que todas as diferenças são totalmente iguais. Assim, a tentativa de perceber tudo diferentemente não esforça tanto o sentido. Por exemplo, a proporção obtida entre:



é mais fácil de se perceber visualmente do que entre:



pois, no primeiro caso, é necessário perceber apenas que a diferença entre quaisquer duas linhas consecutivas é a mesma, enquanto que no segundo exemplo, é necessário comparar partes que são incomensuráveis. Portanto, eles não podem, em quaisquer circunstâncias, ser percebidos completamente de imediato, mas somente em relação a uma proporção aritmética, percebendo que AB consiste de duas partes, enquanto BC consiste de três. É claro que neste caso, a mente está constantemente perplexa.

[...]VII - Finalmente, deve ser observado que em todas as coisas, a variedade é mais prazerosa.

(Descartes, 1961)

(ABDOUNUR, 2006, p.67-69)

Descartes apresenta, assim, uma analogia muito pertinente no que diz respeito à predileção humana por padrões agradáveis visualmente, que pode ser estendida à audição, no âmbito dos intervalos musicais. Porém, ele salienta que a variedade é mais prazerosa, o que podemos relacionar com o fato de ouvir não apenas consonâncias, mas também dissonâncias, gerando desta forma a satisfação no apreciar musical.

1.4.2 Temperamento: a busca por uma divisão igual

Entende-se o Temperamento¹² como a divisão igual de um intervalo de oitava em doze semitons cujas relações de frequência são exatamente iguais. Este sistema de afinação apresenta uma ligeira imprecisão em seus intervalos, onde alguns são mais valorizados do que outros ao compará-los com os originários da divisão pitagórica ou justa, por exemplo. Sua culminância se deu na emergência de se solucionar problemas que comumente aconteciam com os sistemas predecessores, os quais, devido a uma imprecisão decorrente da divisão desigual, faziam com que tanto compositores ficassem impossibilitados de modular suas composições para tons diferentes no fluir de suas obras, quanto os músicos, ao executar peças em distintos tons, necessitavam reafinar seus instrumentos constantemente. Esta emergência se justifica também ao avistarmos a condição histórica da Música no Renascimento, que, como dito no início desta seção, caracteriza-se como a evolução da polifonia e desenvolvimento da harmonia.

No sentido de solucionar estes problemas enfrentados pela Música, entra a Matemática que em resposta, de forma não repentina, mas em um processo longo por intermédio de vários pensadores, sugere diversas maneiras de se dividir a oitava como exemplos o temperamento desigual, o mesotônico, etc. Então, baseando-se em uma progressão geométrica onde a oitava tem uma relação de frequência $2/1$ e o semitom $2^{1/12}$, o matemático Leonhard Euler (1707-1783), desenvolveu um sistema de afinação que permitiu

¹²Consideramos Temperamento com letra maiúscula, o temperamento igual, atual sistema de afinação musical.

aos compositores modularem suas músicas para quaisquer dos 12 centros tonais sem distorções advindas da divisão assimétrica das várias escalas anteriormente utilizadas. Este sistema consiste no Temperamento, aceito e utilizado até os dias atuais. Percebemos neste momento, uma grande transformação, no sentido de que relações numéricas simples como as razões propostas por Pitágoras e seus sucessores, não mais satisfaziam as necessidades da arte Música, que recorre então a relações numéricas mais complexas, no caso a divisão logaritmica e números irracionais.

É cabível de questionamento, porque na música ocidental divide-se a escala em doze partes iguais, não em cinco como na música oriental, onde as escalas admitem apenas intervalos consonantes, os intervalos de quinta,¹³ ou em mais partes como nas escalas hindu¹⁴, visto que o ouvido humano treinado consegue diferenciar cerca de trezentos sons diferentes dentro de uma oitava? Acredita-se que este fato se deve ao legado de Pitágoras que influenciou fortemente nossa música, pois sua escala continha cinco tons e dois semitons, e, ao dividir os cinco tons em semitons, estamos repartindo o intervalo de oitava em doze partes.

Concluimos este capítulo considerando a importância da Matemática para o desenvolvimento da Música e a importância da Música para a Ciência, a qual desde a antiguidade clássica é considerada não apenas como uma simples arte, mas como um elemento de grande potencial exploratório, tanto no sentido dos sentimentos humanos, quanto no pensamento lógico e científico. Percebemos o quanto elas estão interligadas ao avistar, por exemplo, o quanto pensadores como Pitágoras, Arquitas, Euler, entre outros, visíveis apenas por suas contribuições na área matemática e científica, se dedicaram ao desenvolvimento da Música.

¹³Este fato deve-se ao sentimento de equilíbrio que esta cultura carrega. Para ressaltar esta ideia podemos relacionar a escala pentatônica (cinco tons), utilizada no Oriente com o símbolo Yin-yang ☯ que descreve a busca pela perfeição e o equilíbrio.

¹⁴Estas escalas admitem até vinte e três divisões em uma mesma oitava.

Capítulo 2

Relações entre matemática e música: números em movimento

Por meio de comparações e analogias, explicaremos algumas relações entre matemática e música, as quais consideramos relevantes e com grande potencial para fins didáticos e também para proporcionar ao leitor maior compreensão de alguns fatos expostos no capítulo anterior.

2.1 Razão e proporção

Apresentaremos nesta seção como foram realizados os cálculos das razões que representavam as notas musicais em uma corda vibrante na Antiguidade Clássica. Pitágoras e Arquitas, considerados os maiores representantes da matemática e música neste período, realizaram contribuições que refletem até os dias de hoje. Apesar de o sistema musical utilizado atualmente não ser o pitagórico, sabemos que ele é um produto de várias transformações deste, transformações estas, que buscavam uma divisão igual e um espectro sonoro com maior plasticidade.

2.1.1 Escala musical pitagórica ou diatônica

Pitágoras acreditava que tudo que existe na natureza poderia ser explicado por meio de relações matemáticas e que, quanto mais simples fossem estas relações, mais próximas da realidade e da perfeição elas estariam, tanto que o lema de sua escola era “Tudo é número”. Assim, ao iniciar seus estudos com o monocórdio, procurou utilizar as razões de números inteiros mais simples, com números inteiros de 1 a 4, que combinados em razões, representam as consonâncias mais puras no que tange a audição humana.

Tomando a razão 1 como a que representa a corda inteira, a princípio ele descobriu que:

- ao reduzir a corda a $\frac{3}{4}$ de seu comprimento original, obtinha-se o intervalo de quarta, ou seja, a quarta nota acima da nota inicial;
- já com a razão $\frac{2}{3}$, temos o intervalo de quinta, cinco notas acima da nota inicial;
- $\frac{1}{2}$ obtinha-se a oitava, oito notas acima.

Estas três razões de número inteiros, representam as consonâncias pitagóricas, as quais geram as combinações de sons mais agradáveis ao nosso ouvido quando tocadas simultaneamente com a nota inicial. Sobre este fato, damos destaque à oitava e à quinta, à primeira pois ao reduzir uma corda à metade de seu comprimento original e tocá-la, percebemos como sendo o mesmo som, porém o primeiro grave e o segundo agudo, seria como ouvir um homem e uma mulher cantando a mesma nota, e, à segunda pois,

ao partir da razão $\frac{2}{3}$, Pitágoras organizou matematicamente todo o espectro sonoro grego, ao definir, através de multiplicações sucessivas desta razão, as frações da corda que geram as demais notas de sua escala musical.

Sabemos que na época as notas tinham outros nomes, mas para fins de melhor entendimento, as chamaremos com os nomes atuais:

Figura 2.1: Sequência das notas musicais dentro da escala em uma oitava e razões que geram consonâncias pitagóricas

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
DÓ	RE	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
1			$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{2}$

Fonte: Elaborado pelo autor

O procedimento realizado por Pitágoras para encontrar o intervalo de quinta, o qual consistia em aplicar multiplicações sucessivas da razão $\frac{2}{3}$, é conhecido como **ciclo das quintas**. Um fator importante a se considerar é a condição de existência das notas dentro da escala pitagórica, onde o comprimento C de cada nota deve pertencer ao intervalo $0,5 \leq C \leq 1$.

Demonstremos o ciclo das quintas:

- A quinta nota partindo da nota SOL é a nota RE, onde

$$\text{RE: } \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} .$$

Porém, ao analisarmos a condição de existência, temos que

$$\frac{4}{9} = 0,44 < 0,5 ,$$

o que faz necessário aplicar um procedimento de oitava abaixo, que consiste em multiplicar por 2, ou seja, mesmo que dobrar o tamanho da corda.

$$\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9} = 0,88 > 0,5$$

Assim a condição é satisfeita.

Logo a razão da corda que gera a nota RE é $\frac{8}{9}$.

- A quinta nota partindo da nota RE é a nota LÁ, onde

$$\text{LÁ: } \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27} .$$

Verificamos a condição de existência,

$$\frac{16}{27} = 0,59 > 0,5 ,$$

portanto, neste caso não é necessário aplicar a oitava abaixo.

Temos que a razão da corda que gera a nota LÁ é $\frac{16}{27}$.

- A quinta nota partindo da nota LÁ é a nota MI, onde

$$\text{MI: } \frac{16}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{81} .$$

Porém, ao analisarmos a condição de existência,

$$\frac{32}{81} = 0,395 < 0,5 ,$$

o que faz necessário aplicar uma oitava abaixo.

$$\frac{32}{81} \cdot 2 = \frac{64}{81} = 0,79 > 0,5$$

Assim, a razão da nota MI é $\frac{64}{81}$.

E por fim,

- a quinta nota partindo da nota MI é a nota SI, onde

$$\text{SI: } \frac{64}{81} \cdot \frac{2}{3} = \frac{128}{243} .$$

Ao verificar a condição de existência, temos

$$\frac{128}{243} = 0,53 > 0,5 .$$

Então a razão da corda que gera a nota SI é $\frac{128}{243}$.

Figura 2.2: Escala musical pitagórica ou diatônica em termos da razão do comprimento de uma corda vibrante de comprimento unitário

1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a
DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2
1	0,88	0,79	0,75	0,66	0,59	0,53	0,50

Fonte: Elaborado pelo autor

2.1.2 Escala musical de Arquitas

Arquitas foi o primeiro a dirigir o olhar para a propagação do som, diferente de seus antecessores que mantinham o foco nas fontes de emissão, no caso o monocórdio. Ao comparar sons emitidos por ventos fortes e fracos percebeu que ventos fortes produziam um som agudo enquanto os fracos, grave, sendo ele o primeiro a pensar no conceito de frequência (ABDOUNUR, 2006). Arquitas construiu sua escala musical baseada em razões de corda vibrante que eram determinadas pelas médias harmônicas e aritméticas, diferentemente das encontradas por Pitágoras no experimento do monocórdio, obtendo assim terças mais próximas de seu valor natural, cujo intervalo se tornava mais consonante.

Definimos brevemente as médias utilizadas por Arquitas.

Definição 1. Média aritmética simples é um quociente representado por \bar{x} , onde se tivermos uma série de n valores, é determinada pela expressão:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Definição 2. Média harmônica H dos números reais positivos x_1, x_2, \dots, x_n é o quociente do número de termos pelo inverso dos termos como segue:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Mostremos então como Arquitas definiu sua escala matematicamente:

- Quarta (FÁ) é a média aritmética entre a primeira (razão 1) e a oitava (razão 1/2), que conservavam as razões pitagóricas

$$\text{FÁ: } \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

- Quinta (SOL) é a média harmônica entre primeira (razão 1) e oitava (razão 1/2)

$$\text{SOL: } \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{2} \right)} = \frac{2}{\left(1 + 2 \right)} = \frac{2}{3}$$

- Terça (MI) é a média harmônica entre primeira (razão 1) e quinta (razão 2/3)

$$\text{MI: } \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{3} \right)} = \frac{2}{\left(1 + \frac{3}{2} \right)} = \frac{2}{\left(\frac{5}{2} \right)} = \frac{4}{5}$$

- Segunda (RÉ) é a média harmônica entre primeira (razão 1) e terceira (razão 4/5)

$$\text{RÉ: } \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{5} \right)} = \frac{2}{\left(1 + \frac{5}{4} \right)} = \frac{2}{\left(\frac{9}{4} \right)} = \frac{8}{9}$$

Como não encontramos bibliografia que comprove como Arquitas estabeleceu a razão que representa as notas LÁ e SI, ficamos em débito, porém com os cálculos apresentados podemos observar que ele chegou praticamente nos mesmos resultados de Pitágoras com exceção da terça (MI), o qual obteve uma razão mais simples e que apesar da diferença ser mínima em termos de valor, apresenta uma consonância mais pura que a pitagórica.

Daí vem a mudança de nome desta média, de subcontrária para harmônica, em virtude da descoberta de Arquitas.

Figura 2.3: Comparação entre a terça pitagórica e a de Arquitas

Terça pitagórica	Terça de Arquitas
gerada pelo ciclo de quintas $64/81 = 0,790123\dots$	gerada pela média harmônica entre primeira e quinta $4/5 = 0,8$

Fonte: Elaborado pelo autor

A abordagem do som ligado ao comprimento de uma corda ficou limitado à medida que se desenvolveram os estudos em harmonia. O entendimento das combinações sonoras se tornou mais significativo ao analisar as propriedades do som e seu caráter ondulatório, então falaremos adiante sobre os conceitos de frequência.

2.2 Frequência e som

Define-se frequência como uma grandeza física que indica o número de ocorrências de um determinado evento que podem ser ciclos, voltas, oscilações, pulsos, etc.; em um determinado intervalo de tempo. Este tempo em particular recebe o nome de período (T). Desta forma, a frequência é o inverso do período.

$$f = \frac{1}{T}$$

A unidade no Sistema Internacional para frequência é o hertz (Hz), em homenagem ao físico alemão Heinrich Hertz (1857-1894).

1 Hz significa que determinado evento se repete uma vez por segundo.

O som é definido como a propagação de uma frente de compressão mecânica ou simplesmente uma onda mecânica. Esta onda é longitudinal, se propaga de forma circuncêntrica e tridimensional apenas em meios materiais que tem massa e elasticidade, como sólidos, líquidos ou gases. Para que esta propagação ocorra, é necessário que aconteçam compressões e rarefações em propagação do meio (Figura 2.4).

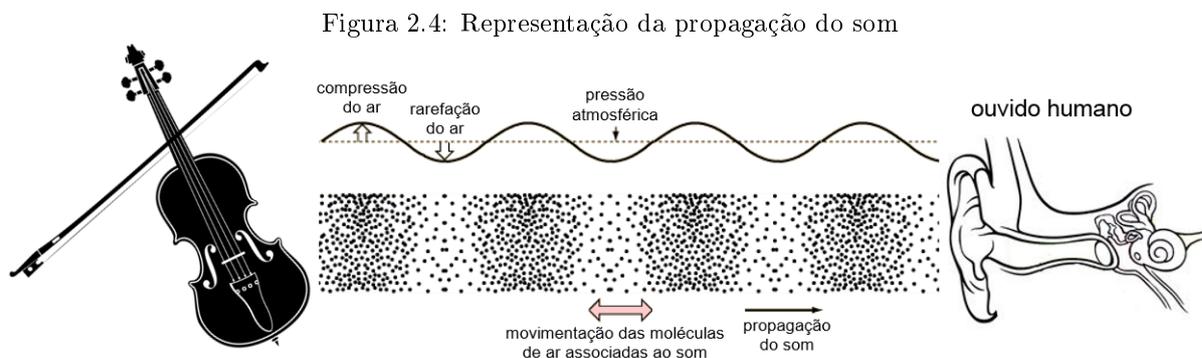
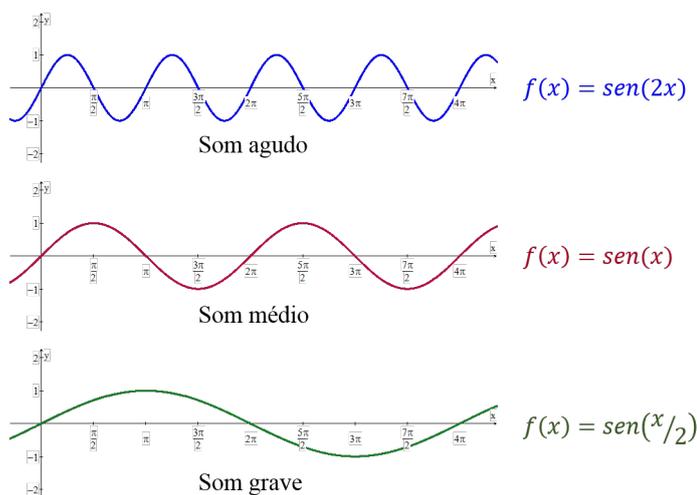


Figura 2.4: Representação da propagação do som

Fonte: Elaborado pelo autor com imagens extraídas da internet

Em busca de um modelo matemático para representar o som, temos que a função senoide fornece um esquema muito útil para este fim, visto que o período da onda (relacionado também ao argumento da função) representa sua frequência e a altura do som; a crista e o vale, fisicamente as respectivas compressão e rarefação do ar; sua amplitude, a intensidade¹ do som; e sua forma, o timbre². Observe as figuras 2.5, 2.6 e 2.7.

Figura 2.5: Curvas senoides representando diferentes alturas ou frequências do som

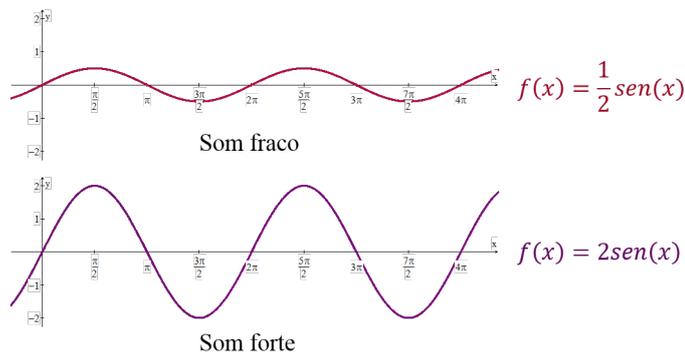


Fonte: Elaborado pelo autor com Winplot

¹Som fraco ou forte.

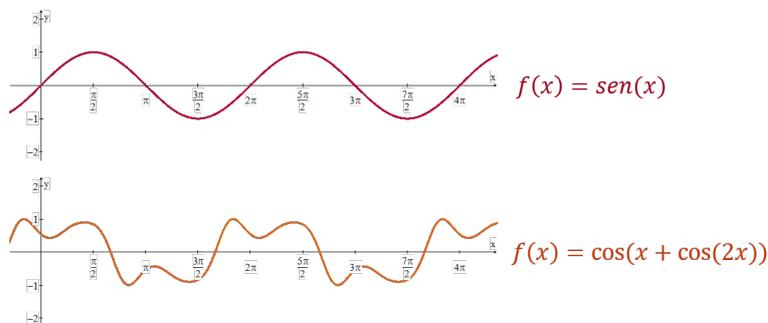
²Característica do som que permite diferenciar sua fonte emissora mesmo que o som emitido tenha a mesma altura.

Figura 2.6: Curvas senoides representando intensidade do som (fraco e forte)



Fonte: Elaborado pelo autor com Winplot

Figura 2.7: Curvas periódicas representando diferentes timbres



Fonte: Elaborado pelo autor com Winplot

Ao analisarmos a escala pitagórica, em termos de frequência, temos que o comprimento da corda que representa cada nota é inversamente proporcional à sua frequência. Desta forma, podemos pensar nesta escala invertendo as razões e multiplicando por uma frequência inicial f_0 que representa a altura da corda inteira. Tomando $f_0 = 100Hz$, temos então a escala pitagórica:

Figura 2.8: Escala pitagórica em termos de frequência

Intervalo	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a
Nota	DÓ	RÊ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
Razão da Frequência	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
Frequência Hz	100,00	112,50	126,56	133,33	150,00	168,75	189,84	200,00

Fonte: Elaborado pelo autor

A escala pitagórica apresenta dois problemas, o primeiro é que um ciclo de quintas não coincide com um ciclo de oitavas. Isso se evidencia ao tentarmos encontrar a solução da seguinte equação exponencial:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m = 2^n$$

$$3^m = 2^{m+n}?$$

Tal equação surge no intuito de tentar encontrar valores m e n , tais que após m ciclos de quintas, multiplicando sucessivamente o fator $3/2$, a razão da frequência obtida equivalha à razão 2^n , após n ciclos de oitava. O mesmo que partir da nota DÓ inicial e verificar a partir de quantos ciclos de quinta e de oitavas se chegará novamente em uma nota DÓ. A solução mais próxima possível são os valores $m = 12$ e $n = 7$, ou seja após doze quintas e sete oitavas encontra-se uma adequação, porém com um desajuste.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129,746337890625$$

$$2^7 = 128$$

Ao efetuarmos a razão entre estes dois valores, relacionamos a pequena diferença existente entre os ciclos de quinta e oitava encontramos a **coma pitagórica**

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \frac{129,746\dots}{128} \approx 1,013$$

que representa um grave defeito na escala, visto que não é possível construir escalas em que todos os intervalos sejam simétricos apenas com intervalos puros.

O segundo problema apresentado, refere-se à impossibilidade de transposição de uma melodia, pois o produto da razão entre dois semitons³ é diferente da razão de um tom. Observe:

Figura 2.9: Razões de frequência entre as notas na escala pitagórica

Notas	DÓ	RE	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
Razão das frequências das notas	1	$9/8$	$81/64$	$4/3$	$3/2$	$27/16$	$243/128$	2
Razão das frequências entre as notas	$9/8$	$9/8$	$256/243$	$9/8$	$9/8$	$9/8$	$9/8$	$256/243$
Distância entre as notas	tom	tom	semi tom	tom	tom	tom	tom	semi tom

Fonte: Elaborado pelo autor

Se os intervalos fossem simétricos, o produto da razão da frequência de dois semitons, seria igual a razão da frequência de um tom, visto que por exemplo, partindo da nota DÓ inicial com frequência 1 e aplicando o fator $9/8$, obtemos a nota RE, que é um tom acima; o mesmo acontece se repetirmos o procedimento com a nota RE, obtemos a nota MI, $(9/8)^2 = 81/64$, ou seja, produto da razão da frequência de dois tons origina outro tom. Por outro lado, o produto da razão da frequência dos semitons, que teoricamente é a metade de um tom,

$$\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = \left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{65536}{59049} \approx 1,11 \neq 1,125 = \frac{9}{8}$$

não gera a razão de frequência de um tom.

Estes aspectos negativos da escala pitagórica levaram ao desenvolvimento do Temperamento, onde o matemático Euler (1707-1783) pesquisou um modelo de afinação baseado em uma progressão geométrica, a qual uma frequência inicial f_0 é multiplicada por um fator t 12 vezes obtendo assim, a oitava, $2f_0$. Deduzamos então o fator t :

³Metade de um tom.

$$\underbrace{t \cdot t \cdot \dots \cdot t}_{12 \text{ vezes}} \cdot f_0 = t^{12} f_0 = 2f_0$$

$$t = \sqrt[12]{2}$$

desprezamos a parte negativa e colocamos em notação exponencial,

$$t = 2^{\frac{1}{12}} \approx 1,059.$$

A escala temperada possibilitou a solução dos problemas apresentados pela divisão desigual e, com esta configuração, a diferença da coma pitagórica foi distribuída entre todos os 12 semitons, gerando a valorização de uns e prejuízo de outros, mas que em um âmbito geral não prejudicou a harmonia, pelo contrário, possibilitou aos compositores modularem para qualquer dos 12 centros tonais, além de evitar que os músicos precisassem reafinar seus instrumentos a cada mudança de tom, visto que os instrumentos musicais eram construídos neste sistema.

A escala temperada tem uma gama cromática⁴, ou seja, as notas tem intervalo de um semitom. Para representação dos semitons utiliza-se os símbolos bemol \flat e sustenido \sharp . O sustenido é utilizado para um semitom acima e o bemol um semitom abaixo. Vejamos a seguir como fica a escala temperada em termos de frequência:

Figura 2.10: Escala temperada em termos de frequência

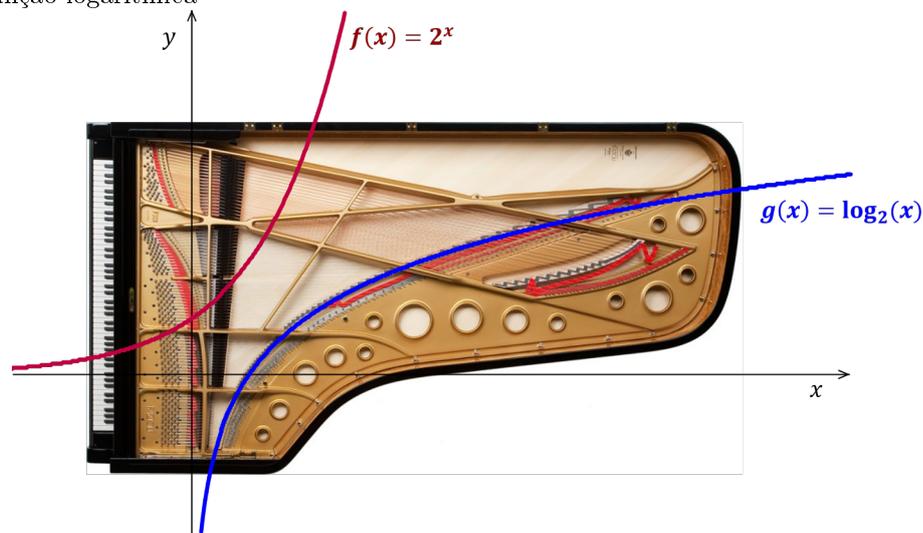
NOTAS	DÓ	DÓ \sharp RÉ \flat	RÉ	RÉ \sharp MI \flat	MI	FÁ	FÁ \sharp SOL \flat	SOL	SOL \sharp LÁ \flat	LÁ	LÁ \sharp SI \flat	SI	DÓ
FATOR	2^0	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	$2^{\frac{12}{12}}$
t	1	1,06	1,12	1,19	1,26	1,33	1,41	1,50	1,59	1,68	1,78	1,89	2,00
FREQ.	100,00	105,95	112,25	118,92	125,99	133,48	141,42	149,83	158,74	168,18	178,18	188,77	200,00

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao observarmos a cauda de um piano de concerto (Figura 2.11), temos claramente, na disposição das cordas, o desenho da curva $f(x) = 2^x$ ou de sua inversa, $g(x) = \log_2(x)$ dependendo do ponto de vista, o que se justifica pelo fato de o sistema de afinação admitir uma divisão logarítmica.

⁴Pense em cromatismo (sentido de cor), quando um tom vai do claro para o escuro ou vice-versa. No caso da música um tom vai do grave para o agudo ou vice-versa na razão de um semitom $t = 2^{\frac{1}{12}}$.

Figura 2.11: Comparação entre o formato da curva formada pela disposição das cordas na cauda de um piano e a função logarítmica



Fonte: Elaborado pelo autor com imagem da Internet e grafico gerado pelo Winplot

2.3 Divisão rítmica

Podemos considerar a simples comparação entre a notação matemática e a notação musical. Por meio de seus símbolos próprios, cada uma carrega as informações que são processadas respectivamente por matemáticos e músicos e os permitem desenvolver suas “artes” de forma padronizada, onde, por exemplo, o Teorema de Pitágoras, por intermédio da notação matemática, pode ser entendido e utilizado da mesma forma por qualquer um em qualquer parte do mundo.

O mesmo acontece com a música, onde, ao exemplificarmos a 9ª Sinfonia de Beethoven, temos que a mesma pode ser ouvida, reconhecida e reproduzida da mesma forma que um teorema na matemática. Mais claramente, consideramos de forma simplista a conjectura de que as notas musicais estão para os números, assim como a Matemática está para a Música.

A notação musical delimita características de uma música, ligadas principalmente à altura e a divisão rítmica das notas musicais.

Ao buscarmos a definição de ritmo, temos que o mesmo se constitui do que flui, move-se de forma regular. Ele está em todo lugar. Nos ponteiros do relógio, nas batidas no coração, nos nossos passos, etc. Em Música, uma partitura geralmente apresenta um ritmo definido⁵, por isso, ao tocar, um músico está constantemente contando mentalmente⁶ 1-2-3-4, ou 1-2-3 ou ainda 1-2-3 4-5-6, etc.

Além da contagem do ritmo, um músico precisa conhecer as figuras rítmicas que fazem a subdivisão do tempo musical⁷, indicando na partitura a duração de cada nota. Os tempos se agrupam em valores iguais e fixam-se dentro de divisões das pautas musicais conhecidas como compassos (Figura 2.13). A seguir apresentamos as figuras de notação rítmica e suas respectivas frações de tempo:

⁵Existem composições que não apresentam ritmo perceptível, chamadas composições com tempo livre.

⁶Se repararmos, alguns músicos fazem a marcação do ritmo batendo o pé, o que na nossa concepção é bastante desagradável esteticamente.

⁷Pulsção básica subjacente a uma composição musical.

Figura 2.12: Figuras rítmicas musicais

Figura Positiva					
Proporção	4	2	1	1/2	1/4
Figura Negativa					
Nome	Semibreve	Mínima	Seminima	Colcheia	Semi colcheia
Denominador de indicação	1	2	4	8	16

Fonte: Extraído da Internet

Os valores de proporção das figuras indicam quantas unidades de duração⁸ cada uma contém, já o denominador de indicação denota em quantas partes uma semibreve deve ser dividida para se obter uma unidade de duração⁹.

Em uma **fórmula de compasso** musical (Figura 2.13), cuja notação se assemelha a uma fração, o número de baixo é o denominador de indicação, já número de cima (numerador) define quantas unidades de tempo o compasso contém. A fórmula de compasso geralmente é escrita no início da composição ou no início de cada um de seus movimentos e também quando ocorre mudança de fórmula durante a música. Neste caso, essa mudança é escrita diretamente no compasso que tem a nova duração.

⁸ Unidade de duração refere-se à figura que está ligada à pulsação do ritmo.

⁹ Na notação musical atual, as notas não tem valor fixo, por isso todas as demais durações são definidas como frações de uma semibreve.

Figura 2.13: Excertos da TWV 41 - Sonata para flauta e baixo contínuo em fá maior de G. F. Telemann com destaque para as fórmulas de compasso e frações de cada figura rítmica

The image shows three musical staves for Flauto. The first staff is labeled 'Vivace' and has a time signature of 4/4 circled in red. Below it are the fractions 1/8, 1/8, 1/4, 1/16, 1/16. The second staff is labeled 'Largo' and has a time signature of 3/4 circled in red. Below it are the fractions 1/4, 3/8, 1/8. The third staff is labeled 'Allegro' and has a time signature of 6/8 circled in red. Below it are the fractions 1/8, 1/8, 1/8, 1/4, 1/8. A vertical red label 'Fórmulas de compasso' is on the left with arrows pointing to the circled time signatures.

Fonte: Elaborado pelo autor

No exemplo da figura anterior apresentamos as primeiras frases musicais de cada um dos três movimentos da Sonata para flauta e baixo contínuo. Percebemos que, em uma mesma obra, o compositor utiliza-se de diferentes fórmulas de compasso de acordo com o sentimento que pretende transmitir¹⁰, pois cada fórmula permite determinar uma pulsação à música. De forma geral, o primeiro tempo de um compasso é tocado de forma mais forte ou mais acentuada, e esta alternância de pulsos fortes e fracos cria uma sensação de repetição ou circularidade.

Cada compasso pode ter qualquer combinação de notas e pausas, mas a soma de todas as durações nunca pode ser menor¹¹ nem maior que a duração indicada pela fórmula.

No primeiro movimento da Sonata, Vivace (Figura 2.13), temos a fórmula de compasso $\frac{4}{4}$, onde no primeiro compasso apresentam-se respectivamente 4 colcheias ($\frac{1}{8}$), 1 semínima ($\frac{1}{4}$) e 4 semicolcheias ($\frac{1}{16}$), somando estas frações, temos

$$4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} + 4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right) = \frac{4}{8} + \frac{1}{4} + \frac{4}{16} = \frac{8 + 4 + 4}{16} = \frac{16}{16} = \frac{4}{4}.$$

O mesmo para o segundo movimento, Largo, cuja fórmula de compasso é $\frac{3}{4}$, temos no primeiro compasso 1 semínima ($\frac{1}{4}$), 1 semínima pontuada ($\frac{3}{8}$)¹² e 1 colcheia ($\frac{1}{8}$), e, a soma das frações

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2 + 3 + 1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

E também para o terceiro movimento, Allegro, $\frac{6}{8}$, no primeiro compasso¹³, 3 colcheias ($\frac{1}{8}$), 1

¹⁰ Além da fórmula de compasso, podemos relacionar este fato com os andamentos, também determinados pelo compositor são descritos geralmente em italiano sobre a pauta musical. Na obra apresentada (figura) os andamentos são: Vivace - rápido e vivo (152 a 168 batidas por minuto); Largo - amplamente (45 a 50 batidas por minuto) e Allegro - ligeiro e alegre (120 a 160 batidas por minuto).

¹¹ Exceto em casos de anacruse que é o nome dado à nota ou sequência de notas que precedem o primeiro tempo forte do primeiro compasso de uma música. Observe na (figura) o terceiro movimento, Allegro, apresenta anacruse.

¹² O ponto aplicado a uma figura rítmica, acrescenta à mesma metade de seu valor, $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

¹³ O anacruse não conta como compasso veja a nota de rodapé 10.

semínima ($1/4$) e 1 colcheia ($1/8$), cuja soma,

$$3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3+2+1}{8} = \frac{6}{8}.$$

Destacamos que neste ultimo caso temos uma fórmula de **compasso composto**.

Compasso composto é aquele em que cada unidade de tempo é subdividida em três notas, cuja duração é definida pelo denominador da fórmula de compasso. Por exemplo, no compasso $6/8$, o denominador indica que uma semibreve foi dividida em 8 partes (em colcheias) e o numerador indica quantas figuras preenchem o compasso, ou seja, o compasso é formado por 6 colcheias. No entanto a métrica deste compasso é binária, ou seja, dois pulsos por compasso. Por isso cada unidade de tempo não é uma colcheia, mas sim um grupo de três colcheias (ou uma semínima pontuada). Como cada pulso é composto de três notas, esse compasso é definido como composto. segunda a escola francesa obtém-se um compasso composto multiplicando um compasso simples pela fracção de $3/2$ por exemplo: o compasso $2/4$ é binário simples, $(2/4) \cdot (3/2) = 6/8$ que corresponde a um binário composto. $3/4$ é ternário simples, $(3/4) \cdot (3/2) = 9/8$ que corresponde a um ternário composto $4/4$ é quaternário simples, $(4/4) \cdot (3/2) = 12/8$ que corresponde a um quaternário composto.

Capítulo 3

Educação Matemática: possibilidades entre a Matemática e a Música

Neste capítulo faremos uma breve reflexão sobre as possibilidades no que tange o ensino das relações entre matemática e música na educação básica.

3.1 Implicações cognitivas

Iniciamos nossas considerações situando o panorama da inteligência humana com base na teoria das inteligências múltiplas do psicólogo educacional Howard Gardner, o qual em seu trabalho definiu um conjunto de sete inteligências a partir da ideia de que o ser humano possui diferentes habilidades. São elas: Linguística, Espacial, Corporal-Cinestésica, Interpessoal, Intrapessoal, Musical e Lógico-Matemática (Gardner, 1994). Sua teoria contrapõe-se à ideia tradicional de inteligência, que a considera apenas como a capacidade de sucesso em testes com fim de medição da mesma, sustentando que as pessoas têm distintas competências e que, em suas atividades, utilizam-se de algum tipo de inteligência, não absolutamente de uma única ou de um mesmo tipo. Segundo Gardner (1994) a escola em seu modelo tradicional se fecha na exploração das inteligências linguísticas e lógico-matemáticas.

Para fins de nossa investigação, nos interessa entender a relação entre a Matemática e a Música. Para tanto, apresentamos de forma sucinta as inteligências musical e lógico-matemática, defendidas por Gardner:

- A inteligência musical se caracteriza através da habilidade de apreciar, compor ou reproduzir uma peça musical. Inclui também a discriminação de sons, a habilidade para perceber temas musicais, a sensibilidade para ritmos, texturas e timbre, e a habilidade para produzir e reproduzir música.
- A inteligência lógico-matemática tem como elementos centrais a sensibilidade para padrões, ordem e sistematização. Habilidade ligada à exploração de padrões, relações e categorias por meio da manipulação de objetos ou símbolos. É a habilidade para lidar com reconhecimento e resolução de problemas e/ou séries de raciocínios. Resumindo, esta inteligência é característica a matemáticos e cientistas.

Cabe aqui uma ressalva, pois o psicólogo educacional afirma que mesmo que os talentos científico e matemático se apresentem em um mesmo indivíduo, suas ações são movidas por diferentes impulsos. Por um lado os matemáticos desejam criar um mundo abstrato consistente, por outro os cientistas pretendem explicar a natureza.

Ele evidencia atenção especial às relações entre as competências matemática e musical, relatando que para a sabedoria popular, essas áreas encontram-se intimamente ligadas, afirmando a existência de elementos matemáticos na música e que estes não deveriam ser minimizados. Gardner exemplifica este fato ao sugerir uma analogia entre matemática e música se referindo à questão do ritmo¹, que exige ao músico alguma competência numérica básica. Também afirma

[...] que estas analogias provavelmente podem ser encontradas entre duas quaisquer inteligências e que, de fato, um dos grandes prazeres em qualquer área intelectual se deve a uma exploração do seu relacionamento com outras esferas da inteligência (GARDNER, 1994, p. 98)

Sabe-se que a inteligência lógico-matemática tem uma íntima relação com o cognitivo, visto as habilidades que engloba, mas procuramos também investigar a relação da inteligência musical com o desenvolvimento do intelecto. Segundo Ilari (2005) diversos estudiosos na área cognitivo musical sugerem que práticas musicais são importantes pelo fato de auxiliarem no progresso auditivo, motor, intelectual e social, além de fortalecer as ligações afetivas. O que nos faz pensar nisto como uma explicação para o fato de estas práticas estarem presentes praticamente em toda parte.

Neste cenário, onde de fato a Música se conecta com a capacidade intelectual, Ilari (2005) afirma que é necessário ter muita cautela, pois muitos mitos se estabeleceram no sentido de atribuir ao contato musical a melhora em outras áreas do conhecimento, como por exemplo a matemática.

O “Efeito Mozart” devido à sua má interpretação, se tornou um destes mitos. Ele consiste em uma pequena melhoria em um sub-teste de habilidades espaciais que faz parte do célebre teste de QI (quociente de inteligência) Stanford Binet. Os autores desta pesquisa, analisaram a performance de ratos de laboratório e de estudantes universitários em condições sonoras variadas, como por exemplo no silêncio e na presença de peças de Mozart, e concluíram que a audição da música de Mozart causava um progresso temporário nas habilidades espaciais dos participantes. Este resultado gerou e ainda gera grande polêmica, visto que a disseminação prematura por parte da mídia originou uma febre de consumo das obras de Mozart e programas de educação musical que prometiam tornar bebês mais inteligentes que a média (ILARI, 2005). A comunidade científica prontamente contestou este resultado referindo-se ao equívoco dos defensores do efeito ao tomarem as habilidades espaciais como se fossem sinônimos da inteligência humana. Como vimos, de acordo com Gardner (1994), a inteligência humana é composta por várias facetas e habilidades espaciais constituem apenas parte do conjunto de habilidades que compõem esta inteligência humana.

Ilari (2005) cita, também, outra pesquisa realizada sobre os efeitos da música no desenvolvimento da inteligência humana:

Costa-Giomi (1999), por exemplo, estudou os efeitos de três anos de aprendizado do piano ao desenvolvimento cognitivo de crianças canadenses. As crianças participantes do experimento [...] receberam um piano em suas casas e tiveram aulas semanais gratuitas por três anos consecutivos. A cada ano as crianças passavam por uma bateria de testes de inteligência e tinham suas pontuações comparadas àquelas de um grupo controle. As pontuações obtidas pelas crianças musicalizadas foram melhores que as obtidas pelas crianças do grupo controle nos dois primeiros anos, porém foram equivalentes entre os grupos, ao término do terceiro ano do projeto. (Ilari, 2005)

Sobre a relação causal entre aprendizado musical e habilidades matemáticas, Cuttiela (1996) apud Ilari (2005) afirma que possivelmente não exista, necessariamente, tal relação, mas em suas pesquisas

¹Trabalhamos esta analogia no capítulo anterior, seção 2.3.

se deparou com o fato de que os alunos matriculados em cursos e aulas de música geralmente são alunos mais aplicados que a média, sendo, portanto, bons alunos também na matemática e em outras disciplinas.

Mesmo visto que, os resultados dos estudos realizados não apresentem provas significativas sobre o fato exposto e que estes resultados sejam de certa forma pequenos para obter conclusões decisivas, defendemos e acreditamos na ideia de que a música está relacionada ao desenvolvimento intelectual em suas várias habilidades englobadas, também no sentido de justificar o ensino desta arte nas escolas e a disseminação da música erudita, exemplificando a música de Mozart, que transmite sentimentos de concentração, tranquilidade, diferentemente de um funk ou música sertaneja, populares em nosso país. Acreditamos também que estudos futuros possam revelar o verdadeiro potencial da música no desenvolvimento da inteligência.

3.2 Um olhar sobre a Legislação Brasileira

A Matemática sempre teve sua devida importância no currículo, visto que a resolução de problemas da vida cotidiana se apoia fortemente no pensamento lógico-matemático. Consideram-se, também, as conquistas da humanidade em termos evolutivos que, em sua totalidade, se devem ao conseqüente desenvolvimento da Ciência através de suas engrenagens constituídas de puro raciocínio matemático. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o ensino de Matemática indicam a importância desta disciplina no sentido de que a mesma “funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares [...] e, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno” (BRASIL, 1997a, p. 15).

Miseravelmente desde a década de 70, o ensino de Música havia sido excluído do currículo escolar. No entanto, novos caminhos despontaram graças ao sancionamento da Lei nº 11,769/2008, que acrescentou ao artigo 26 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB) o §6º que restabelece a Música como conteúdo obrigatório, porém não exclusivo, da disciplina de Arte nos ensinos Fundamental e Médio (BRASIL, 2008). Este regulamento prevê que as aulas de Música devem ser incorporadas ao currículo de Arte e pode ser ministrada por professores sem habilitação específica, o que institui também pelo fato de não ser um conteúdo exclusivo, espaço para trabalhos vinculados com outras áreas do conhecimento, o que fundamenta por exemplo, estudos dirigidos sobre as conexões entre a Música e a Matemática.

Ao verificar os PCNs do ensino de Arte em busca de aspectos que garantam propostas de ligação da Música e outras áreas do conhecimento, encontramos orientações no sentido de promover interdisciplinaridade por meio da metodologia de projetos, a fim de reforçar um dos principais objetivos da Arte, conectar diversos campos de informação, cuja responsabilidade é do professor.

Uma das modalidades de orientação didática em Arte é o trabalho por projetos. [...] a serem desenvolvidos em caráter **interdisciplinar** [...] Na prática, os projetos podem envolver ações entre disciplinas, como, por exemplo, Língua Portuguesa e Arte, ou **Matemática e Arte** e assim por diante. (BRASIL, 1997b, p. 76-77, grifo nosso)

Os PCNs para o ensino de Matemática, também apontam para a ideia da aplicabilidade desta disciplina em diversos âmbitos:

A Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. [...] Também é um instrumental importante para diferentes áreas do conhecimento, por ser utilizada em estudos tanto ligados às ciências da natureza como às ciências sociais e por estar presente na composição musical^a, na coreografia, na arte e nos esportes (BRASIL, 1997a, p. 24-25, grifo nosso).

^aEntendemos a expressão **composição musical** neste contexto não apenas no sentido explícito (ato de compor uma música, onde a matemática está presente também), mas sim de forma mais ampla, em sua composição estrutural, como mostramos neste trabalho. Este escrito ressalta o reconhecimento da importância da relação matemática e música no âmbito dos PCNs.

Vários pesquisadores, a citar Campos (2012), Abdounur (2006), Granja (2006) e Camargos (2010), estabelecem que a Matemática e a Música, mesmo aparentemente apresentando diferenças, ao serem relacionadas em um ambiente didático, promovem significações às quais conceitos matemáticos e musicais se tornam cada vez mais relevantes à medida que se religam. Neste sentido, cabe discutir os tipos de abordagens didáticas das relações matemática e música nos termos de inter, pluri e transdisciplinaridade.

3.3 Inter, Pluri e Transdisciplinaridade

Disciplina pode ser entendida como “uma categoria organizadora dentro do conhecimento científico; ela institui a divisão e a especialização do trabalho e responde à diversidade das áreas que as ciências abrangem” (MORIN, 2003, p. 105). Este termo pode ser aplicado tanto no sentido apresentado, disciplinas científicas ou ramos do saber; como também às disciplinas escolares ou componentes curriculares. Morin (2003), destaca que mesmo com a inserção do conceito de disciplina em um conjunto mais amplo, há também uma tendência a autonomia, justificada por sua delimitação de fronteiras, linguagem que se constitui, elaboração de técnicas e utilização de teorias próprias. Ele chama a atenção do pesquisador sobre os perigos da hiperespecialização, entendida como a especialização que se fecha em si mesma gerando a desintegração da ideia de conjunto entre o objeto e o conhecimento, e que tem como consequência o isolamento das disciplinas entre si. Nas palavras do autor,

O objeto da disciplina será percebido, então, como uma coisa auto-suficiente; as ligações e solidariedades desse objeto com outros objetos estudados por outras disciplinas serão negligenciadas, assim como as ligações e solidariedades com o universo do qual ele faz parte. A fronteira disciplinar, sua linguagem e seus conceitos próprios vão isolar a disciplina em relação às outras e em relação aos problemas que se sobrepõem às disciplinas (MORIN, 2003, p. 106).

Neste horizonte, permitir a abertura das disciplinas se faz necessário para proporcionar a integração das mesmas com problemáticas globais. Ao sugerir esta ideia somos lançados à reflexão sobre os conceitos de inter, pluri e transdisciplinaridade. Para tanto, recorreremos às definições apresentadas por Lucena (2005):

- Interdisciplinaridade não se apresenta como uma proposta pedagógica de sistemas institucionais burocratizados, mas nasce como desejo e aspiração dos professores “que, cansados da rotina disciplinar buscam novos pares para compor ideias rumo a trocas de experiências e de pontos de vistas” (LUCENA, 2005, p. 29).

- Pluridisciplinaridade pode ser entendida como uma coordenação entre disciplinas, nas quais existe uma fraca interação. Nesta configuração, os professores trabalham um assunto comum às suas disciplinas, porém “dentro de sua área específica de atuação, não havendo necessidade de interatividade entre elas” (LUCENA, 2005, p. 28).
- Transdisciplinaridade tem como finalidade fundamental a religação de saberes, a qual engloba e ultrapassa os limites da inter e da pluridisciplinaridade, “estabelece-se como uma fusão entre várias disciplinas envolvidas” (LUCENA, 2005, p. 29, grifo do autor).

Por meio dos conceitos apresentados, fica claro que a abertura de disciplinas com abordagem inter e transdisciplinar é capaz de satisfazer as necessidades educacionais no sentido de integração dos conhecimentos, porém cabe destacar que Morin (2003) não considera a divisão dos conhecimentos em disciplinas de forma negativa, pelo contrário, acredita que as disciplinas “são plenamente justificáveis, desde que preservem um campo de visão que reconheça e conceba a existência das ligações e das solidariedades” (MORIN, 2003, p. 113).

Portanto, no sentido de religação de saberes, acreditamos que dentre as três abordagens, a inter e transdisciplinaridades possuem grande potencial no que tange o auxílio e norte para a visão sobre as várias perspectivas da realidade quase sempre limitadas apenas aos campos das disciplinas.

Trazendo esta ideia para o nosso contexto, o ensino das relações entre a Matemática e a Música, Pillão (2009) confirma esta ideia ao afirmar que

Tanto o enfoque interdisciplinar, quanto o enfoque transdisciplinar estão contemplados nos trabalhos sobre matemática e música. Em um contexto escolar, de um lado, temos essas duas ciências no currículo de diferentes disciplinas (matemática e artes), por outro lado, ensinar e aprender matemática por meio das relações entre matemática e música, partindo da história do desenvolvimento do conhecimento, pode situar esse conhecimento em um contexto, em uma realidade, pode-se então realizar atividades que contemplem os enfoques citados (PILLÃO, 2009, p. 39).

Ao evocar os conhecimentos pertencentes ao universo matemática e música em uma sala de aula, surgem ao professor diversos desafios. O principal acreditamos ser a modificação da postura tradicionalista, afim de conseguir modificar a visão disciplinar de um conhecimento pronto e autossuficiente para um ambiente onde a busca por um novo horizonte, pautado nos aspectos apresentados, proporcione também aos alunos uma aprendizagem com maior significação.

Capítulo 4

Oficinas Didáticas: Relato de Experiência

Neste capítulo relataremos nossa experiência com a aplicação das Oficinas Didáticas desenvolvidas em nosso projeto de IC (Iniciação Científica) voluntário realizado no IFSP Campus Birigui, sob a orientação das professoras Manuella Aparecida Felix de Lima e Zionice Garbelini Martos Rodrigues. A elaboração destas oficinas compreendeu o estudo bibliográfico apresentado neste trabalho e a busca por uma turma para aplicação, visto que grande foi a dificuldade para se conseguir um espaço para poder desenvolver nossa proposta e avaliar como a abordagem das relações entre matemática e música podem contribuir para a aprendizagem de ideias e conceitos matemáticos.

4.1 Caminho percorrido

A princípio surge um grande desejo de nossa parte em desenvolver um trabalho relacionando a Música e a Matemática, desde o início do curso de graduação, pois temos grande afinidade, principalmente com a primeira, que se deve ao contato com esta arte desde a pré-adolescência. No terceiro semestre do curso recebemos um convite da professora Manuella para fazer uma IC sobre o tema frações contínuas, pois a mesma realizou mestrado nesta área e em suas pesquisas esbarrou em artigos falando sobre a relação destas frações com a música, mas não utilizou-os em sua pesquisa devido à falta de tempo e o pouco conhecimento na área musical. Fizemos essa IC, mas a nossa imaturidade impossibilitou trabalhar com profundidade os artigos propostos, pois eram em inglês e mesmo traduzindo-os não tínhamos conhecimento considerável sobre sistemas de afinação musical, ao qual o tema frações contínuas se entrelaçava. Após esta IC, com um intervalo de um semestre, nosso desejo de trabalhar as relações matemática e música se tornou mais latente e iniciamos o projeto de IC “Matemática e Música: Oficinas Didáticas”. Devido à grande estima que possuímos pela professora Zionice e ao seu profundo envolvimento com a Educação Matemática, a convidamos para participar do projeto como co-orientadora, que aceitou com grande prazer e muito contribuiu para a realização deste, principalmente no referencial teórico para a área da educação.

Iniciamos nossos estudos com a leitura de diversos materiais sobre o assunto, desde vídeos, artigos, dissertações de mestrado, livros e teses de doutorado. Então, escrevemos o projeto com o objetivo de responder à seguinte pergunta: Como a abordagem didática das relações entre a Matemática e a Música em uma classe de Ensino Médio pode auxiliar na construção do conhecimento matemático? Com embasamento maior nos trabalhos de Abdounur (2006) e Campos (2012), elaboramos quatro oficinas didáticas sobre as relações matemática e música partindo do contexto histórico com ênfase no desenvolvimento de ambas e com uma abordagem que acreditamos ser tanto interdisciplinar quanto transdisciplinar.

Cabe ressaltar que surgiram vários problemas para a realização deste projeto, destacamos aqui a dificuldade enfrentada logo no início para conseguir um espaço de oito aulas em uma classe, nas aulas de matemática, para o desenvolvimento das oficinas. Como participamos do projeto PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) tínhamos esperança de conseguir este espaço nas aulas da professora supervisora, na escola parceira do IFSP em que desenvolvíamos nossas atividades. Ao apresentar o projeto para a professora, a mesma aprovou a ideia e se propôs prontamente a oferecer as aulas. Como pretendíamos usar alguns recursos da instituição como sala de vídeo, por exemplo, vimos a necessidade de buscar apoio da direção da escola, para a qual apresentamos o projeto e nossas expectativas. No entanto, para nossa surpresa houve rejeição por parte dos gestores da escola, com a alegação de que a nossa proposta não se encaixava no currículo do Estado e que prejudicaria o andamento dos tópicos que seriam abordados na apostila fornecida pela Secretaria da Educação.

Tentamos justificar, sem sucesso, que as oficinas seriam realizadas com intervalo de duas semanas cada, sem prejuízo nos conteúdos previstos, e que seriam desenvolvidas atividades que contribuiriam de forma significativa para a aprendizagem dos alunos, pois mesmo não abordando o mesmo conteúdo da apostila naquele momento, eram conteúdos também de séries anteriores, como por exemplo, conceitos de razão e proporção, sobre os quais os alunos demonstraram baixo domínio de acordo com os resultados da avaliação diagnóstica aplicada. Sem ouvidos aos nossos questionamentos, fomos proibidos de desenvolver o projeto nesta escola, o qual já havíamos apresentado aos alunos, que estavam muito animados e motivados em participar, pois já tinham realizado a avaliação diagnóstica inicial e muitos já haviam assinado o termo de seção de imagem.

Este problema relatado é comum ao professor que busca criatividade na sua ação docente, esta ação pode ser analisada à luz da insubordinação criativa que, segundo as autoras D'Ambrósio e Lopes (2015), consiste em tomar decisões que não atendem expectativas de diretrizes superiores, mas se leva em conta que essas decisões são feitas em prol da melhoria e do bem estar e do aprendizado dos alunos e da comunidade escolar. O fato de sair um pouco do conteúdo da apostila, ou abordá-lo de forma diferenciada se faz necessário, visto que o cenário do conhecimento apresentado pelos alunos da escola pública é preocupante, fato este evidenciado no resultado de nossa avaliação diagnóstica realizada, onde a maior parte da classe do 9º ano do ensino fundamental não sabia nada sobre conceitos simples de razão e proporção. Uma ação de insubordinação criativa se fundamenta na premissa de que “atrever-se a criar e ousar na ação docente decorre do desejo de promover uma aprendizagem na qual os estudantes atribuam significados ao conhecimento matemático” (D'AMBRÓSIO; LOPES, 2015, p.2). As autoras ainda destacam que:

Durante a carreira docente, muitas vezes, o professor e o pesquisador se deparam com uma estrutura escolar ou universitária imersa em profundo controle burocrático e tecnocrático, limitante e condicionante da ação educativa e investigativa. Às vezes, convertemo-nos em pessoas que realizam aquilo que outros especialistas têm planejado e/ou determinado fora e à margem de nossos contextos. [...] Apesar dos espaços complexos e repletos de conflitos, professores e pesquisadores têm buscado a insubordinação criativa por meio de ações reflexivas, para exercer a profissão de forma digna, responsável e comprometida com a melhoria da vida humana. (D'AMBRÓSIO; LOPES, 2015, p.6-7)

Como estávamos com tempo escasso e o cronograma do projeto em atraso, decidimos não recorrer a instancias superiores à da escola e optamos por aplicar as oficinas para os alunos da 3ª série do Ensino Médio integrado ao curso Técnico em Administração do IFSP Campus Birigui em um horário alternativo, existente entre as aulas do período matutino. Desta forma, não atrapalhamos o curso das aulas de nenhuma disciplina, no entanto tivemos que contar com o interesse dos alunos em participar das oficinas, visto que era facultativa a participação dos mesmos.

No primeiro contato com estes alunos apresentamos o projeto, seus objetivos e logo em seguida aplicamos a avaliação diagnóstica inicial para toda a sala. Esta avaliação buscou averiguar os conhecimentos prévios destes alunos sobre os conteúdos que seriam abordados majoritariamente na primeira oficina, além de saber a conexão dos mesmos tanto com música, quanto com matemática. Percebemos que os alunos demonstraram interesse, principalmente quando falamos que ao final do projeto iríamos construir um instrumento musical. Apresentamos na figura 4.1 a tabulação desta avaliação.

Figura 4.1: Tabulação dos resultados da avaliação diagnóstica inicial

A-1)	Você gosta de Música? Por quê?	Sim	Não		
		16	1		
A-2)	Quais são as notas musicais?	Correto	Errado		
		13	4		
A-3)	Você possui alguma ligação com a Música? Qual? (canta, toca algum instrumento, participa de algum grupo musical, gosta de ouvir música)	Sim	Não		
		13	4		
A-4)	Se você toca algum instrumento musical, qual e há quanto tempo?	Sim	Não		
		6	11		
A-5)	Que estilo de música você gosta de ouvir?				
B-1)	Você gosta Matemática? Por quê?	Sim	3		
		+/-	4		
		Não	10		
B-2)	Resolva as seguintes questões:	a) Um rolo de corda tem 10 metros de comprimento. Para amarrar um facho	Correto	Errado	Acertos por aluno
			10	7	
		b) Minha mãe fez uma pizza e dividiu em 9 pedaços iguais. Todos comeram	Correto	Errado	
			8	9	
	c) Um terreno tem 50 metros de comprimento e 40 de largura, deseja-	Correto	Errado		
		2	15		
B-3)	O que dificulta sua aprendizagem na disciplina de Matemática?				
C-1)	Você acha que a Música tem alguma relação com a Matemática? Caso positivo, dê um exemplo.	Sim	Não		
		10	7		
C-2)	Tem interesse em aprender mais sobre as relações entre Matemática e Música?	Sim	Não		
		14	3		

Fonte: Elaborado pelo autor

4.2 As Oficinas

Relatamos nesta seção o conteúdo trabalhado em cada oficina didática. Disponibilizamos também nos **Apêndices** os planos de aula de cada oficina.

4.2.1 Pitágoras e o Experimento Musical

Esta oficina objetivou entender o contexto histórico das relações entre a Matemática e a Música; introduzir os conceitos musicais de intervalos, escalas e notas musicais relacionando-os com os conceitos matemáticos de razão e proporção; e, entender o experimento de Pitágoras e a formação da escala musical diatônica. Os alunos conheceram as origens da Matemática e da Música passando da pré-história até a antiguidade clássica, quando foi realizado o primeiro experimento científico envolvendo estas duas áreas. Com o uso dos conceitos matemáticos de razão e proporção, foram calculados os intervalos da escala musical diatônica. Também foi realizada a verificação do experimento pitagórico com um violão e uma régua, onde os alunos tiveram a oportunidade de medir a corda de acordo com os cálculos realizados e tocar as notas musicais a fim de vivenciar o experimento na prática.

A oficina foi dividida em três partes, cada parte com a duração de duas horas aula. Na primeira apresentamos o conteúdo teórico e resolvemos as atividades propostas, na segunda os alunos reproduziram o experimento pitagórico utilizando um violão, e na terceira foi feita uma avaliação sobre os conteúdos desenvolvidos.

A primeira parte foi realizada no dia doze de agosto de dois mil e quinze, com a presença de doze alunos e teve a duração de uma hora e quarenta minutos. Iniciamos falando aos alunos sobre o objetivo do projeto e nossa motivação em desenvolvê-lo. Em seguida, introduzimos as origens da matemática e música e enfatizamos que nos períodos mais remotos é possível encontrar registros dessas duas artes em separado, como exemplo, apresentamos no slide uma imagem de uma figura rupestre que retrata animais e riscos emparelhados que supõem a contagem dos animais pelo homem pré-histórico, e mencionamos uma frase de Abdounur (2006) que diz que “a contagem de objetos se faz presente desde os tempos mais remotos” chamando atenção para o fato de que a Matemática está presente desde muito tempo na humanidade; já referente à Música apresentamos uma imagem de uma flauta pré-histórica feita do osso de um pássaro, datada de aproximadamente 35 mil anos, a qual segundo o arqueólogo que a encontrou sugere ser essa, um dos instrumentos musicais mais antigos, senão o mais antigo já encontrado; o que mostra que a Música também se faz presente desde muito tempo. Falamos então sobre a definição de música presente no Google que a denota como uma “1. combinação harmoniosa e expressiva de sons; 2. a arte de se exprimir por meio de sons, seguindo regras variáveis conforme a época, a civilização etc.” destacamos o item 2 da definição que a retrata como a “arte de se exprimir”, o que pode ser entendido como uma arte de expressar sentimentos; então fizemos um paralelo com as respostas dadas pelos alunos na avaliação diagnóstica, onde ao responderem porque gostavam de música, mencionaram que ela os ajuda a se expressarem e transmite sentimentos de paz, alegria, etc. Para reforçar esta ideia falamos sobre o deus da mitologia grega Orpheu que conforme consta nas histórias, ao tocar sua harpa encantava e amansava animais, acalmava correntezas, devido ao poder atribuído à Música. Demos então alguns minutos para que os alunos transcrevessem com suas palavras o que absorveram sobre os fatos expostos referentes às origens da Matemática e da Música e solicitamos que socializassem seus conhecimentos sobre estes fatos, a maioria disse que conhecia sobre a origem da Matemática, mas que da Música não faziam ideia. A próxima etapa foi a exibição do vídeo Donald no país da Matemática, uma produção da Disney voltada para o público infantil, disponível no *Youtube* e muito utilizada para fins educacionais, este vídeo conta a trajetória do personagem “Pato Donald” em um mundo mágico onde o “Espírito da Aventura” o guia mostrando as relações da Matemática com a Música, a natureza e o universo de um modo geral. Exibimos apenas o trecho que fala sobre música, especificamente sobre a descoberta da escala diatônica pelos pitagóricos, e fizemos uma socialização do vídeo por meio do preenchimento de um texto sobre o mesmo com palavras chave. Em seguida, falamos sobre o contexto histórico da antiguidade clássica onde surge, conforme mostrado no vídeo, o primeiro sinal de casamento entre Matemática e Música, quando Pitágoras utilizando-se do instrumento de uma única corda, o monocórdio, relacionou

razões de números inteiros com os comprimentos da corda que geravam sons agradáveis. Apresentamos então as notas musicais, seus nomes, e fizemos uma analogia destas com os números, já que através da notação matemática e dos números, matemáticos do mundo inteiro compartilham e desenvolvem as mesmas ideias, da mesma forma que músicos através da notação musical conseguem tocar uma mesma música. Apresentamos também o conceito de escala musical que é uma sequência de notas e relacionamos esta ideia com uma escada, a qual é possível subir ou descer os degraus (notas musicais) quando se está tocando-a; e o conceito de intervalo musical que consiste em contar a quantidade de notas entre uma nota e outra. Concomitante à explicação, os alunos preenchiam os esquemas disponibilizados nas atividades propostas. Logo então, falamos sobre o conceito matemático de razão e efetuamos a resolução das três questões disponíveis na avaliação diagnóstica aplicada com a finalidade de promover uma revisão sobre estes conceitos, visto que a quantidade de erros foi superior à de acertos. Por último, efetuamos os cálculos da escala pitagórica na lousa e realizamos a verificação do experimento em um violão para os alunos. No final desta etapa reproduzimos um vídeo de uma performance da obra Quatro Estações do compositor Vivaldi feita pela Akademie für Alte Musik Berlin (Academia de Música Antiga de Berlin) com o objetivo de proporcionar acesso a estes alunos à cultura da música erudita. Escolhemos esta performance por ser coreográfica, onde os músicos além de tocar seguem passos coreográficos, por exemplo, imitando pássaros no movimento da estação primavera. Visto que poucos destes alunos tem ou tiveram contato com este tipo de música, achamos necessário apresentar de uma forma que chamasse atenção e este vídeo despertou o interesse e a curiosidade destes alunos em pelo menos escutar esta música.

A segunda parte foi realizada no dia dezanove de agosto, com a presença de sete alunos e com a duração também de duas horas aula, esta parte pode ser considerada a mais significativa da oficina em termos de produção dos alunos, pois sugerimos que os mesmos realizassem com base no que foi abordado na primeira parte, o experimento de Pitágoras. Os alunos foram divididos em dois grupos e cada grupo tinha inicialmente a missão de desenvolver os cálculos explicados anteriormente. Auxiliamos os mesmos por meio de questionamentos e sanando dúvidas que surgiam no decorrer desta atividade. Percebemos que apenas a exposição destes conhecimentos conforme foi feito na primeira etapa não foi suficiente para a compreensão dos cálculos e do experimento em si. Eles fizeram muitos questionamentos com relação a quando e porque era necessário multiplicar a razão encontrada no ciclo das quintas por dois¹. Após os cálculos das razões, foi entregue a cada grupo um violão e uma régua. Neste momento solicitamos que medissem o comprimento de uma das cordas do violão e realizassem a transposição das medidas encontradas para cada nota de acordo com os cálculos da razão realizados previamente. Esta atividade também gerou questionamentos no sentido de como chegar na medida de cada nota proporcionalmente ao comprimento da corda. Então, explicamos como chegar nesse resultado utilizando o procedimento de regra de três simples e simplificamos o raciocínio pensando na razão de cada corda como uma porcentagem, onde para reduzir o tamanho da corda do violão a $\frac{3}{4}$ de seu tamanho original por exemplo, bastava multiplicar o comprimento encontrado, 64cm por 0,75, proporção correspondente a esta razão. Seguindo ao cálculo das proporções foi solicitado que os alunos confeccionassem as marcações das medidas em um papel no comprimento exato para o posicionamento sob a corda do violão, tocar as notas na escala pitagórica e tocar alguma música utilizando apenas uma corda do violão. Como a maior parte dos alunos nunca tocaram um instrumento, sugerimos que tocassem a música infantil DÓ-RÉ-MI-FÁ. Este momento foi muito divertido, pois os alunos tocaram e se empolgaram bastante. Alguns aprenderam a tocar esta música até no teclado que disponibilizei na sala, uma aluna tinha conhecimentos musicais e também tocou outras músicas. Por meio da percepção auditiva e visual, esta atividade de verificação do experimento pitagórico proporcionou aos alunos uma maior compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados.

A terceira parte foi realizada no dia vinte e seis de agosto, com a presença de cinco alunos e com a duração de duas horas aula, nesta etapa foi realizada uma avaliação abordando os conceitos

¹ Este procedimento está explicado no capítulo 2, seção 1.

matemáticos de razão e proporção e também os conceitos musicais com a finalidade de verificação da aprendizagem dos alunos. Também realizamos a leitura do artigo “A música e o desenvolvimento da mente no início da vida: investigação, fatos e mitos” onde discutimos com os alunos o efeito da música no nosso cognitivo. Infelizmente nem todos os alunos que fizeram a avaliação participaram assiduamente das etapas anteriores, o que acreditamos que possa ter prejudicado o resultado. Dos cinco alunos que realizaram esta avaliação três participaram das duas etapas anteriores, e os outros dois participaram de pelo menos uma. Enquanto os alunos resolviam a prova colocamos para reproduzir, em volume agradável, sonatas para piano do compositor Mozart. Como existem pesquisas que apontam para capacidade desse tipo de música proporcionar maior concentração para atividades que exigem raciocínio, fizemos isso para propor uma posterior discussão na leitura do artigo. Discutiremos mais profundamente sobre esta etapa na seção 4.3.

4.2.2 A Música na Idade Média

Com a finalidade de conhecer o contexto musical da Idade Média e o processo histórico que contribuiu para o desenvolvimento das diversas formas musicais da época, das quais, algumas foram abordadas (*Cantochão* e *Organum*); nesta oficina foram trabalhados os conceitos de ritmo/batimento, frequência, consonância, dissonância, ambos pertencentes ao universo musical. Os alunos ouviram os exemplos musicais, realizaram cálculos da frequência da escala pitagórica e foi proposta também a criação de um padrão rítmico utilizando as figuras rítmicas.

Esta oficina foi realizada no dia dois de setembro com a presença de sete alunos. A princípio fizemos uma recapitulação do que foi trabalhado anteriormente e falamos sobre contexto histórico do desenvolvimento da Música na Idade Média, onde há uma transformação da música melódica em polifônica. Para ilustrar bem esta passagem, falamos sobre o canto gregoriano, ou canto dos monges, o qual em sua versão inicial era chamado *Cantochão* e consistia em apenas uma linha melódica. Reproduzimos um exemplo de *Cantochão* extraído da internet. Em seguida falamos sobre os *Organa* onde o *Cantochão* recebe vozes de acompanhamento caracterizando assim o início da música polifônica ocidental. Reproduzimos também três exemplos de *Organum*, o *Paralelo*, o *Livre* e o *Melismático*. Falamos sobre o *Moteto*, que é uma forma de composição com várias vozes, o que caracteriza fortemente a transformação da melodia em polifonia, e também reproduzimos um exemplo de *moteto*. Demos um tempo para os alunos responderem as atividades propostas, como forma de fixar os conceitos expostos e, logo em seguida, reproduzimos o primeiro bloco do vídeo “A Matemática da Música” pertencente à série “Arte e Matemática” do Ministério da Educação. Este vídeo fala sobre os diversos aspectos em que o músico lida com matemática, além de falar sobre ritmo, samba, consonâncias pitagóricas, e termina com uma abordagem sobre o trítone, um intervalo musical de três tons que é dissonante e era muito evitado na música da Idade Média, devido ao escasso conhecimento sobre harmonia. Expomos o conceito de frequência musical e mostramos que em uma corda vibrante, a frequência é inversamente proporcional ao comprimento da corda. Tocamos o violão para proporcionar uma maior compreensão sobre este fato e em seguida calculamos a escala pitagórica em termos de frequência, invertendo as razões do comprimento da corda e multiplicando por uma frequência inicial. Depois falamos sobre as figuras rítmicas da música, que determinam a duração de cada nota musical. Ilustramos as figuras com um vídeo de um baterista tocando padrões com cada figura e solicitamos que os alunos preenchessem um esquema disponibilizado nas atividades propostas com as frações que representam cada figura rítmica e que criassem e tocassem um padrão de ritmo simples, assim como o apresentado no vídeo do baterista, com a finalidade de propiciar uma maior compreensão deste conceito. Tínhamos planejado a reprodução do segundo bloco do vídeo “A Matemática da Música” que trata sobre a divisão igual do espectro sonoro que possibilitou aos compositores como Bach, exemplificado neste bloco, utilizar não apenas consonâncias em suas composições, mas também dissonâncias como o

trítone para gerar tensão e emoção em suas músicas; mas infelizmente o tempo foi curto, então falamos brevemente o conteúdo deste bloco e solicitamos que os alunos o assistissem em casa. No final desta oficina tocamos uma composição de Bach/Gounod (Ave Maria) na flauta doce, a fim de proporcionar novamente o contato destes alunos com a música erudita.

4.2.3 As Escalas Musicais

O trajeto pelos fatos históricos que estruturaram a Música atual está permeado por uma relação íntima com a Matemática, que buscava tornar a divisão das notas na escala mais igual, equilibrada e que possibilitasse a transposição de músicas para qualquer tom. Isso culminou na escala atual, a temperada. Esta oficina mostrou aos participantes o resultado das várias escalas musicais criadas no decorrer da história, as quais foram calculadas em termos de frequência e escutadas por meio de arquivo mp3. Esta atividade possibilitou analisar por meio da percepção auditiva as sutis diferenças entre as escalas apresentadas.

Esta oficina foi realizada no dia nove de setembro de dois mil e quinze, com a presença de uma aluna. Iniciamos com uma breve recapitulação do que foi trabalhado até então e introduzimos o que seria trabalhado neste encontro, explicitando que a partir da Idade Média surgiu uma preocupação em tornar a divisão da escala mais igual para evitar problemas de afinação e transposição. Falamos, então, novamente sobre o sistema de afinação pitagórico explicando que ele possui entonação justa, no sentido de que todos os intervalos musicais podem ser descritos por relações numéricas simples, as razões das consonâncias pitagóricas e as demais obtidas pelo ciclo das quintas. Então reproduzimos um mp3 da escala pitagórica. Em seguida falamos sobre o sistema de afinação justo, ou escala de Zarlino, onde as únicas notas que mantêm a divisão pitagórica são as consonâncias, as demais possuem afinação um pouco mais baixa, para obter sons mais próximos de seu valor natural. Após a explicação reproduzimos um arquivo mp3 desta escala. O próximo sistema que surge é o temperamento mesotônico. Datado do século XVI, mas ainda muito utilizado até o século XVII, tentava deixar a divisão da escala mais igual, com terças mais justas e quintas mais comprimidas. Reproduzimos também um mp3 desta escala. Por fim, falamos sobre a escala temperada e sobre a contribuição do matemático Euler que pesquisou este sistema de afinação, onde a escala é subdivida em doze semitons iguais, pensando em uma progressão geométrica de razão $2^{\frac{1}{12}}$. Este sistema de afinação permitiu aos compositores modularem suas obras para quaisquer dos 12 centros tonais, sem distorções geradas por intervalos correspondentes, que se apresentavam até então assimétricos nas diferentes escalas sugeridas anteriormente. Mostramos no slide uma imagem de uma cauda de piano de concerto onde é possível ver, na disposição das cordas, o desenho de uma função exponencial, o que se justifica pela forma que o sistema de afinação do piano é concebido, por meio de uma divisão logarítmica. Para finalizar a oficina reproduzimos o vídeo “A Música das Esferas” pertencente à série “Arte e Matemática” do Ministério da Educação. Este vídeo aborda diferentes tipos de músicas desde o popular ao erudito, fala sobre o som e suas características, a divisão das escalas e ritmos indianos, onde uma mesma escala assume divisão maior que a ocidental; dá destaque também à música de Bach, enfatizando sua obra “O cravo bem temperado” onde o compositor escreveu estudos para cravo nos doze tons nos modos maior e menor.

4.2.4 Os Instrumentos Musicais

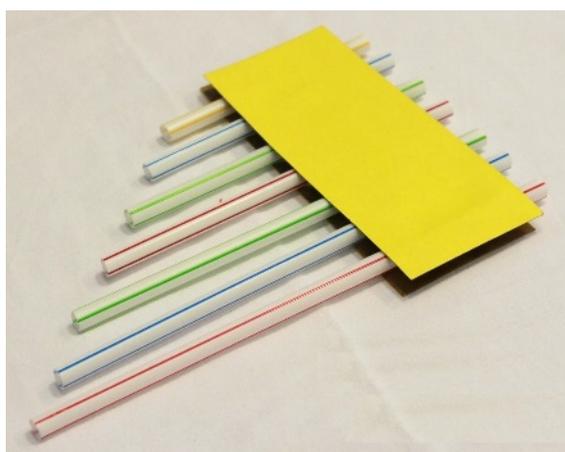
Última oficina do projeto, teve como fim utilizar de todos os conhecimentos abordados nas anteriores, sobre ritmo/batimento, frequência, notas/escalas musicais e partitura, com o intuito de construir um instrumento musical, criar e tocar uma composição melódica para o instrumento construído. A proposta foi a construção de uma flauta pã feita com canudos, porém como sugerido na oficina anterior

²Este procedimento está explicado no capítulo 2, seção 2

os participantes caso tivessem interesse poderiam construir outro tipo de instrumento. O objetivo desta atividade de construção e composição foi recapitular os conhecimentos abordados anteriormente e utilizar as inteligências musical e matemática.

Esta oficina foi realizada no dia dezesseis de setembro de dois mil e quinze, com a presença de cinco alunos. Iniciamos questionando os alunos se é possível ensinar matemática abordando conceitos de música e vice-versa e todos concordaram que é possível sim, que uma pode explicar a outra e auxiliando no entendimento de ambas. Optamos por explorar neste encontro os instrumentos musicais da orquestra sinfônica, falamos sobre a subdivisão da orquestra em naipes de instrumentos e sobre cada instrumento integrante destes naipes. Nas “madeiras” temos os instrumentos de sopro, flauta, oboé, clarinete e fagote; nas “cordas”, violino, viola clássica, violoncelo e contrabaixo acústico; nos “metais”, trompete, trombone, trompa e tuba; e na “percussão”, prato, triângulo, bumbo, caixa, tímpano, etc.; outros instrumentos incorporam a orquestra, como piano, harpa, cravo, órgão, etc. Para que os alunos conhecessem o som de cada instrumento, reproduzimos um vídeo de uma execução da obra “Bolero” do compositor Maurice Ravel, pela Orquestra Filarmônica de Berlim. Nesta obra, uma única melodia é tocada a cada instante por um instrumento diferente, começando com uma intensidade bem sutil com a flauta até que no fim cresce com a força dos metais. Após este momento de apreciação, partimos para a construção da flauta pã, mostramos uma pronta e tocamos para que os alunos visualizassem no que consistia este instrumento. Ficaram muito empolgados, então começamos cortando os canudos, dado o tamanho do canudo que gerava a primeira nota da escala, aferido soprando diversos tamanhos de canudo até encontrar o que gerasse a frequência da nota DÓ. Construímos uma flauta na escala pitagórica, pois a maioria dos alunos conhecia somente sobre esta escala, visto que apenas uma aluna participou da Oficina III que abordava a escala temperada, utilizada nos dias atuais. Assim, calcularam o comprimento dos canudos que geram as demais notas, tamparam uma das extremidades com cola quente e os uniram em uma placa de papelão, construindo assim a flauta pã (Figura 4.2). Para finalizar, aplicamos uma avaliação final para verificar o que ficou para estes alunos de todo o trabalho desenvolvido e fizemos uma pequena confraternização com degustação de chocolates e agradecimento aos participantes.

Figura 4.2: Flauta pã feita de canudos



Fonte: Elaborado pelo autor

4.3 Resultados obtidos

Nesta seção discorreremos sobre os resultados obtidos com relação ao que foi alcançado dos objetivos traçados e o que ficou de contribuição para os envolvidos no projeto.

Sobre a avaliação da Oficina I - Pitágoras e o Experimento Musical, a mesma foi dividida em duas partes. A primeira envolvendo apenas conceitos matemáticos de razão e proporção, abordando especificamente: notação fracionária; representação de razão partindo de conceitos, observação de figuras, dados em uma tabela; razão de proporcionalidade entre triângulos semelhantes; criação de uma situação problema envolvendo razão. A segunda envolvendo conceitos de matemática e música onde perguntamos sobre as origens da matemática e música, quem foi Pitágoras, quais são as notas musicais, e no que consistia o experimento de Pitágoras. Considerando a nota como um conceito de 0 a 10 para cada uma destas avaliações, obtivemos uma nota média entre os cinco participantes de 5,3 na primeira parte que verificou os conceitos matemáticos de razão e uma média de 7,85 na segunda parte, que verificou os conceitos de matemática e música. Comparando este resultado com o resultado da avaliação diagnóstica inicial, na qual tivemos uma nota média de 3,92 considerando os mesmos critérios, porém para dezessete alunos, percebemos que houve uma maior compreensão sobre os conceitos de razão e proporção e creditamos esta melhora de 1,38 na nota média à abordagem feita que relacionou estes conceitos com a Música. Nesta avaliação, a pergunta B-4 questionou sobre a contribuição das atividades desenvolvidas na Oficina I. Segue a transcrição da pergunta e as respostas dos alunos:

- **B-4) As atividades desta oficina contribuíram para o seu entendimento sobre os conceitos de razão e proporção? Por quê?**
 - Aluno A: “Sim, Porque agora quando eu leio um exercício e aparece a palavra razão e proporção eu consigo entender melhor o que se pede no exercício.”
 - Aluno B: “pouca coisa, pois relembrou algumas coisas boas”
 - Aluno C: “Sim pois algumas coisa que não lembrava ou tinha dificuldade já ajudou e conseguimos melhorar”
 - Aluno D: “Sim, pois contribuíram para um melhor aprendizado de assuntos ligados a matemática, relacionados à musica”
 - Aluno E; “Sim, não sabia resolver exercícios de razão”

Analisando as respostas dos alunos, confirmamos que a atividade de verificar o experimento de Pitágoras com o violão, medindo a corda e calculando a razão do comprimento de cada nota, explorando os conceitos matemáticos de razão e proporção e relacionando-os com a Música contribuiu de forma significativa para a aprendizagem destes alunos.

Um de nossos objetivos na aplicação destas oficinas, foi proporcionar aos envolvidos, contato com a música erudita e, conforme relatamos em todas as etapas, procuramos inserir este tipo de música por meio da reprodução de vídeos e áudios e também fizemos a leitura de um artigo que tratava sobre o efeito da música no nosso cognitivo. Abordamos nesta leitura o conteúdo da seção 2.4 deste trabalho e questionamos aos alunos, entre outras coisas, se eles acreditam que, dependendo do tipo de música, esta pode interferir em nosso estado mental proporcionando concentração e aumentando nossa habilidade de raciocínio. Transcreveremos a seguir as questões B-5 e B-6 que questionavam aos alunos seu posicionamento quanto a composição “As Quatro Estações” de Vivaldi e se escutar as Sonatas para piano de Mozart enquanto resolviam as questões da avaliação interferiu em seu estado.

- **B-5) Você conhecia a composição “As Quatro Estações” de Vivaldi? Comente sobre esta obra.**

- Aluno A: “Não.”
 - Aluno B: “Não, achei interessante.”
 - Aluno C: “Eu não conhecia e achei muito legal pois a incenação e som descrevia bem cada estação do ano.”
 - Aluno D: “Não, ainda não conheço.”
 - Aluno E; “Não conhecia, achei interessante como as notas diferentes representam cada estação”
- **B-6) A música reproduzida enquanto você resolvia as questões interferiu no seu estado? Que sentimento ela lhe transmitiu?**
- Aluno A: “Sim. Me deixou mais concentrada e relaxada.”
 - Aluno B: “Um pouco, pois a cabeça começa a se voltar a musica ai atrapalha a concentração”
 - Aluno C: “Não, pois esse tipo de musica eu não gosto então não interfere em mim de maneira positiva”
 - Aluno D: “Sim, relaxa a mente, o que torna os pensamentos claros e o raciocínio mais facil.”
 - Aluno E; “Não, não sou acostumada a resolver coisas enquanto ouço música.”

Fazendo uma análise das respostas, verificamos que houve um interesse considerável pela música erudita. Os alunos A e D não participaram da primeira parte da Oficina I, o que justifica seu desconhecimento sobre a obra apresentada. A respeito do “Efeito Mozart” e a interferência da música em nosso cognitivo, houve uma divisão de opiniões, percebemos que os alunos que já tinham contato com a música (Aluno D) ou que já tinham a prática de ouvir enquanto estudam (Aluno A), concordaram que a música de Mozart ajuda na concentração e relaxamento, enquanto os demais discordaram totalmente ou em parte. Mesmo que a opinião não foi unânime, esta atividade de leitura do artigo sobre o assunto e apreciação de música erudita foi muito válida no sentido de proporcionar uma oportunidade de conhecer um pouco mais sobre este universo e oferecer uma alternativa para aumentar a concentração nos estudos em outras atividades com esta demanda.

As atividades da Oficina II - A música na Idade Média, proporcionaram aos participantes o conhecimento do desenvolvimento da matemática e música com uma visão histórica, além de trabalhar as inteligências corporal e cinestésica e musical na audição dos exemplos musicais da época. Proporcionou também o conhecimento ainda que não de forma profunda, devido ao tempo escasso, sobre conceitos musicais de frequência e divisão rítmica.

Na Oficina III - As Escalas Musicais, também houve a audição de exemplos das escalas que surgiram no decorrer dos acontecimentos históricos, e esta atividade também favoreceu o estímulo das inteligências múltiplas, pois fizemos uma comparação entre as escalas no sentido de analisar suas sutis diferenças tanto sonoras quanto em valores de frequência. Também deduzimos matematicamente a escala temperada, o que propiciou um maior entendimento sobre progressão geométrica e funções exponencial e logarítmica também ao comparar o formato destas curvas com a cauda do piano. Lamentamos o fato de nesta oficina haver apenas uma aluna presente. Na avaliação final questionamos os alunos sobre a participação e os mesmos justificaram sua ausência alegando a necessidade de utilizar o horário das oficinas para fazer trabalhos e tarefas escolares ou para descansar, visto que alguns alunos trabalham no período noturno e se sentem cansados pela manhã.

A Oficina IV - Os Instrumentos Musicais proporcionou aos alunos conhecer ainda mais sobre música erudita, pois apresentamos as orquestras, os instrumentos que a compõem além de abordar as características do som relacionando-o com a função senoide. A atividade de construção da flauta pã possibilitou o trabalho em equipe e a revisão e utilização dos conhecimentos adquiridos nas oficinas

anteriores. Não conseguimos que os alunos compusessem e tocassem uma melodia com a flauta construída, devido à demanda de tempo que esta atividade levaria, o qual não tínhamos disponível.

Em nossa avaliação final nos preocupamos em verificar se a essência do trabalho ficou para os alunos, fizemos perguntas referentes ao conteúdo trabalhado as quais todos os participantes da última oficina apresentaram rendimento satisfatório. Perguntamos também a opinião destes alunos sobre trabalhar as relações matemática e música na sala de aula, as quais transcrevemos a seguir.

• **D-2) Qual a sua opinião sobre trabalhar as relações entre a Matemática e a Música na sala de aula?**

- Aluno A: “Tem que ser uma aula dinâmica, porque se for com muito conceito a aula fica difícil e cansativa.”
- Aluno B: “Acredito que vá ser uma ideia complicada de ser elaborada e fazer com que todos os alunos de uma sala (± 40) se concentrem o suficiente e necessário.”
- Aluno C: “Agora eu tenho um motivo para poder continuar escutar musica na sala. Brincadeirinha. Eu gostei pois agora toda vez que ouvir falar em P.A e PG, razão, eu lembro das aulas de musica e fica mais facil lembrar os conceitos básicos.”
- Aluno D: “Acho importante saber como as notas foram criadas e a relação das duas materias, musica e matemática, com marcação de tempo e divizão das notas”
- Aluno E; “É interessante principalmente para aqueles que tem afinidade com a música.”

O aluno A deixou implícito o fato de a abordagem de muitos conceitos tornar a aula cansativa, percebemos que nos momentos das oficinas onde havia apenas explicação de conceitos históricos e matemáticos ou a exibição de vídeos sobre esses conteúdos, houve uma certa dispersão, onde os alunos ou perdiam a concentração e conversavam uns com os outros ou bocejavam. Devido a esse fato ser previsível, procuramos incluir o máximo de atividades que exigiam a participação destes alunos. Por outro lado, percebemos que nos momentos onde a Música estava inserida, esses momentos de dispersão raramente aconteciam. Mediante este fato, constatamos que a Música de certa forma tornou a aula mais atraente e dinâmica. O aluno B afirmou que trabalhar estes conteúdos em uma sala de aula de aproximadamente quarenta alunos é uma atividade complicada para se realizar, visto que é difícil conseguir a concentração de um número grande de alunos. Sobre esta afirmação concordamos em parte. Acreditamos que seria possível ter trabalhado com a turma inteira (17 alunos), porém como a participação nesta aplicação foi facultativa, ficamos à mercê do interesse destes alunos, o que infelizmente não aconteceu para a maioria, mas os poucos que participaram, apresentaram interesse e concentração. Realmente trabalhar com uma turma de quarenta alunos não deve ser fácil, mas de repente fazendo este trabalho em conjunto com outros professores, como por exemplo com um professor de artes, esta dificuldade pode ser vencida.

Considerações Finais

Ao explicitar os fatos históricos que criaram a Matemática e a Música atuais conseguimos enxergar suas relações com mais clareza, religar os conceitos que, como vimos, desde muito tempo sempre estiveram conectados. Tais conceitos nos fazem entender a importância de cada uma no viés da História. Cabe relatarmos aqui nosso exemplo pessoal de que mesmo estudando a disciplina de Matemática desde a infância e estudando Música desde a pré-adolescência, nos era desconhecido, até então, o fato de que o famoso matemático grego Pitágoras, cujo importante teorema sobre triângulos retângulos o seu nome carrega, pode ser considerado o pai da matemática e música já que o mesmo se apresenta como o primeiro a delinear relações entre estas áreas por meio de seu experimento com o monocórdio, experimento este que curiosamente é considerado o primeiro na história da Ciência. O trajeto evolutivo da Música a partir da Idade Média, onde sai da simples melodia para a polifonia, representa um grande impulso para que pensadores posteriormente a partir da Renascença se preocupassem em explicar cientificamente as propriedades e características do som, com estudos ondulatória e harmonia, para auxiliar a Música a desenvolver a evolução da polifonia, muito bem caracterizada pelas composições de Johann Sebastian Bach (1685-1750). Estas realizações só foram possíveis com o auxílio da Matemática na contribuição personificada por diversos teóricos e pensadores das duas áreas, mas em especial Euler que pesquisou e matematizou o Temperamento, nosso atual sistema de afinação musical, baseado em uma divisão logarítmica onde todos os intervalos musicais compartilham uma mesma relação simétrica.

Avistando as maravilhas evidenciadas nesta pesquisa, entendemos que as relações entre matemática e música devem e podem ser muito bem exploradas em ambiente escolar, visto que uma das maiores dificuldades enfrentadas pelo professor de Matemática atualmente é o desinteresse e falta de estímulo dos alunos em buscar compreender a Matemática ensinada. Nossa experiência como aluno estagiário de graduação, bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e professor, mostra-nos um distanciamento por grande parte dos estudantes não apenas da disciplina Matemática como outras que exigem habilidades lógico-matemáticas, exemplo: Física, Química, etc. Este distanciamento dificulta muito o trabalho do professor e o que geralmente ocorre é um fracasso no ensino. Os estudiosos em Educação Matemática propõem como uma das possíveis soluções para este problema, uma maior significação do que é ensinado, relacionando os temas com o cotidiano e a prática na abordagem, para trazê-los mais próximos da realidade do educando e tornar o conhecimento científico mais palpável. Isto é possível ao trabalhar conceitos de matemática e música em sala de aula, visto que as tendências mais recentes em educação dão destaque à criatividade e à análise crítica da evolução do conhecimento matemático ao longo da história (D'AMBROSIO, 1986).

O cenário atual da educação nacional em termos de legislação se tornou, desde 2008, muito favorável à prática de abordagens inter e transdisciplinares sobre matemática e música, visto a obrigatoriedade do ensino de Música dentro da disciplina de Arte, porém percebemos, também por relatos, que poucos professores de Arte se preocupam com este fato, não trabalhando assim conteúdos de Música. Portanto, enxergamos um terreno bastante fértil para que professores de Arte e Matemática se unam e semeiem projetos interdisciplinares sobre matemática e música na escola.

Em em nosso projeto de IC, no qual elaboramos oficinas didáticas sobre este tema, procuramos proporcionar por meio das atividades um enfoque transdisciplinar no sentido apresentado por Pillão (2009). Neste estudo procuramos utilizar os conhecimentos no âmbito da matemática e música, por meio de analogias, para estruturar e auxiliar na aprendizagem dos educandos. A atividade de calcular as notas da escala pitagórica, medi-las e tocá-las no violão proporcionou aos alunos um melhor entendimento sobre os conceitos de razão e proporção, além de estimulá-los em distintas habilidades seguindo a ideia das inteligências múltiplas de Gardner. Infelizmente devido a falta de um espaço dentro do período regular de aulas, nos deparamos com o problema da não aderência de maior parte da turma no projeto, problema este que procuramos interpretar à luz das ideias de Zabala (1998), o qual concebe a aprendizagem como uma construção pessoal da qual cada indivíduo atribui significado a um objeto de ensino, e que “implica a contribuição da pessoa que aprende, de seu **interesse e disponibilidade**, de seus conhecimentos prévios e de sua experiência” (ZABALA, 1998, p. 63, grifo nosso). Este fato prejudicou em grande parte a obtenção de maiores resultados no sentido de verificar como a abordagem das relações entre matemática e música podem auxiliar no aprendizado matemático. Mesmo nas condições apresentadas consideramos a experiência muito válida no sentido de nos proporcionar experiência no que tange a praxis do ensino destas relações em sala de aula.

A proposta de levar este assunto para a sala de aula contribui para a qualidade do ensino, pois como mostrado, trabalha com as inteligências múltiplas, favorece à afetividade com a Matemática, possibilita a relação de conceitos há muito tidos de forma separada e sugere um ensino mais significativo. Esperamos que este trabalho inspire outros pesquisadores que, assim como nós, pelo amor à Matemática e à Música, disseminem estas ideias e proporcionem aos seus alunos e a cada vez mais pessoas a oportunidade de poder conceber estas duas artes/ciências em seus vários aspectos compartilhados ou não. Registramos aqui também nosso interesse, em próximos estudos, desenvolver vias para que os conhecimentos sobre matemática e música tomem cada vez mais espaço no âmbito educacional e escolar.

Referências Bibliográficas

- [1] ABAR. Associação brasileira de arte rupestre. **A arte rupestre pré-histórica**. Disponível em: <http://www.globalrockart2009.ab-arterupestre.org.br/arterupestre.asp>. Acesso em: 28 nov. 2015.
- [2] ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música: pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras, 2006.
- [3] ARAÚJO, S. **A evolução histórica da flauta até Boehm**. Disponível em: <http://www.fernandosantiago.com.br/evoftra.pdf>. Acesso em: 12 out. 2015.
- [4] BENNETT, R. **Uma breve história da música**. Tradução de Maria Resende Costa. Rio de Janeiro: Zahar, 1986.
- [5] BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.
- [6] BRASIL. Lei nº 11769, de 18 de agosto de 2008. Altera a Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, Lei de Diretrizes e Bases da Educação, para dispor sobre a obrigatoriedade do ensino da música na educação básica. **Diário Oficial da União**, Brasília, p. 1. 18 ago. 2008
- [7] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília : MEC/SEF, 1997a.
- [8] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: arte / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília : MEC/SEF, 1997b.
- [9] CAMARGOS, C. B. R. **Música e Matemática: a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. Disponível em: http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacoes_2010/Diss_Chrisley.pdf. Acesso em: 30 nov. 2015.
- [10] CAMPOS, G. P. S. **Música e matemática na educação: é possível?** Vitória: Faculdade de Música do Espírito Santo Maurício de Oliveira, 2012.
- [11] D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação matemática**. São Paulo: Editora Unicamp e Sammus Editorial, 1986.
- [12] D'AMBROSIO, B. S; LOPES, C. E. **Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático** **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v.29, n.51, abr. 2015. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v29n51/1980-4415-bolema-29-51-0001.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2015.
- [13] FREDERICO, E. **Música: breve história**. São Paulo: Irmãos Vitale, 1999.

- [14] GARDNER, H. **Estruturas da mente**: a teoria das inteligências múltiplas. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1994.
- [15] GRANJA, C. E. S. C. **Musicalizando a escola**: música, conhecimento e educação. São Paulo: Escrituras, 2006.
- [16] ILARI, B. A música e o desenvolvimento da mente no início da vida: investigação, fatos e mitos. **Electronic musicological review**: Revista eletrônica de musicologia. Paraná, v.9, n.1, out. 2005. Disponível em: http://www.rem.ufpr.br/_REM/REMy9-1/ilari.html. Acesso em: 30 nov. 2015.
- [17] LUCENA, I. C. R. **Educação matemática, ciência e tradição**: tudo no mesmo barco. 223 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Sociais e Aplicadas, Natal, 2005. Disponível em: <ftp://ftp.ufrn.br/pub/biblioteca/ext/bdtd/IsabelCRL.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2015.
- [18] MORIN, E. **A cabeça bem-feita**: repensar a reforma, reformar o pensamento. 8.ed. Tradução de Eloá Jacobina. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2003.
- [19] NATURE. **New flutes document the earliest musical tradition in southwestern Germany**. Disponível em: <http://www.nature.com/nature/journal/v460/n7256/full/nature08169.html>. Acesso em 12 out. 2015.
- [20] PILLÃO, D. **A pesquisa no âmbito das relações didáticas entre matemática e música**: estado da arte. 2009. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde.../Delma_Pillao.pdf. Acesso em: 14 abril. 2015.
- [21] ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Apêndice A - Planos de aula do Projeto de Iniciação Científica Matemática e Música: Oficinas Didáticas

Plano de Aula Oficina I: Pitágoras e o Experimento Musical – Parte I

Data de aplicação: 12/08/2015

Elaboração: Edvan Ferreira dos Santos

Aplicado e elaborado para a 3ª série do Técnico em Administração Integrado ao Ensino Médio do IFSP Campus Birigui.

Objetivos

1. Entender o contexto histórico das relações entre a matemática e a música;
2. Conhecer os conceitos musicais de intervalos, escalas e notas musicais relacionando-os com os conceitos matemáticos de razão e proporção;
3. Entender o experimento de Pitágoras e a formação da escala musical diatônica;
4. Apreciar uma composição de música erudita.

Materiais

1. Lousa; 2. Projetor; 3. Teclado; 4. Violão; 5. Régua; 6. Calculadora.

Metodologia

1. Introdução
 - Objetivos das oficinas didáticas; • Breve relato sobre as origens da matemática e música.
2. Vídeo: “Donald no País da Matemática”
 - Questionamento sobre o conteúdo do vídeo.
3. Antiguidade Clássica
 - Contexto histórico da época de Pitágoras • Escola Pitagórica
4. Pitágoras
 - Quem foi Pitágoras? • Experimento do Monocórdio
5. Monocórdio
 - Estrutura • Vídeo
6. Notas musicais, escalas e intervalos
 - Atividade
7. Razão e proporção
 - Noções básicas (breve revisão) • Atividade
8. O Experimento Musical de Pitágoras
 - Intervalos de quarta, quinta e oitava • Atividade (corda de 12 cm) • Círculo das quintas • Atividade (proporção)
9. O Experimento na Prática

• Partes do violão • Atividade prática 10. Momento de Apreciar (Apreciação Musical) • As Quatro Estações – A. Vivaldi – Op. 08 RV 269 • Considerações finais

Avaliação

Dar-se-á pela observação da participação nos questionamentos, atividades propostas e análise posterior do videotape.

Referências

ABDOUNUR, O. J. Matemática e música: pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 2006.

CAMPOS, G. P. da S. Música e matemática na educação: é possível? Vitória: Faculdade de Música do Espírito Santo Maurício de Oliveira, 2012.

Plano de Aula Oficina I: Pitágoras e o Experimento Musical – Parte II

Data de aplicação: 19/08/2015

Elaboração: Edvan Ferreira dos Santos

Aplicado e elaborado para a 3ª série do Técnico em Administração Integrado ao Ensino Médio do IFSP Campus Birigui.

Objetivos

1. Revisar brevemente o contexto histórico do surgimento da Matemática e da Música, notas, escalas e intervalos musicais; quem foi Pitágoras e seu experimento musical;
2. Reproduzir o Experimento de Pitágoras (monocórdio) utilizando um violão;
3. Resolução de problemas e questões envolvendo os temas razão e proporção;
4. Discutir o efeito da música sobre o desenvolvimento da inteligência.

Materiais

1. Lousa; 2. Projetor; 3. Teclado; 4. Violão; 5. Régua; 6. Calculadora.

Metodologia

1. Revisão
 - Contexto histórico do surgimento da Matemática e da Música; • Notas, escalas e intervalos musicais; • Quem foi Pitágoras e seu experimento musical;
2. Experimento na prática
 - Cálculo das razões que geram as notas da escala pitagórica; • Transposição da escala pitagórica para a corda mi grave do violão; • Observação e comparação da divisão da escala pitagórica com os trastes do violão; • Desafio: tocar uma música com apenas uma corda na escala pitagórica.
3. Avaliação
 - I • Resolução de problemas e questões envolvendo os temas razão e proporção; • Avaliação sobre o conteúdo desta Oficina; 4. Momento de Apreciar • No momento da resolução da Avaliação I serão reproduzidas algumas obras de Mozart • Discussão sobre o “Efeito Mozart”.
5. Considerações finais
 - Considerações sobre as atividades realizadas; • Expectativas para a próxima oficina e agradecimentos.

Avaliação

Dar-se-á pela observação da participação nos questionamentos, atividades propostas e análise posterior do videotape.

Referências

ABDOUNUR, O. J. Matemática e música: pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 2006.

CAMPOS, G. P. da S. Música e matemática na educação:é possível? Vitória: Faculdade de Música do Espírito Santo Maurício de Oliveira, 2012.

Plano de Aula Oficina II: A Música na Idade Média

Data de aplicação: 02/09/2015

Elaboração: Edvan Ferreira dos Santos

Aplicado e elaborado para a 3ª série do Técnico em Administração Integrado ao Ensino Médio do IFSP Campus Birigui.

Objetivos

1. Entender o contexto musical da época por meio da audição obras;
2. Entender o processo histórico que envolveu as variadas formas musicais;
3. Conhecer os conceitos musicais de ritmo e batimento.

Materiais

1. Lousa; 2. Projetor; 3. Notebook; 4. Caixa de som.

Metodologia

1. Revisão
 - Contexto histórico do surgimento da Matemática e da Música; • Notas, escalas e intervalos musicais;
2. Audição de exemplos musicais da época
 - Cantochoão; • Organum paralelo; • Organum livre; • Organum Melismático.
3. Reprodução de vídeo
 - A Matemática da Música disponível em: <http://tvescola.mec.gov.br/tve/video/arte-e-matematica-a-matematica-na-musica> ;
4. Figuras rítmicas

Avaliação

Dar-se-á pela observação da participação nos questionamentos, atividades propostas e análise posterior do videotape.

Referências

ABDOUNUR, O. J. Matemática e música: pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 2006.

CAMPOS, G. P. da S. Música e matemática na educação:é possível? Vitória: Faculdade de Música do Espírito Santo Maurício de Oliveira, 2012.

Plano de Aula Oficina III: As Escalas Musicais

Data de aplicação: 09/09/2015

Elaboração: Edvan Ferreira dos Santos

Aplicado e elaborado para a 3ª série do Técnico em Administração Integrado ao Ensino Médio do IFSP Campus Birigui.

Objetivos

1. Entender o contexto musical da época por meio da audição das escalas musicais;
2. Entender o processo histórico que envolveu as variadas formas musicais;
3. Entender como se estruturou a escala Temperada por meio de cálculos.

Materiais

1. Lousa; 2. Projetor; 3. Notebook; 4. Caixa de som;

Metodologia

1. Revisão

• Contexto histórico do surgimento da Matemática e da Música; • Notas, escalas e intervalos musicais;

2. Audição de exemplos das escalas musicais

• Escala Pitagórica; • Escala de Zarlino; • Escala Mesotônica; • Escala Temperada.

3. Reprodução de vídeo

• A Música das Esferas disponível em: <http://tvescola.mec.gov.br/tve/video/arte-e-matematica-musica-das-esferas> ;

4. Cálculo da escala temperada em termos de frequência.

Avaliação

Dar-se-á pela observação da participação nos questionamentos, atividades propostas e análise posterior do videotape.

Referências

ABDOUNUR, O. J. Matemática e música: pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 2006.

CAMPOS, G. P. da S. Música e matemática na educação:é possível? Vitória: Faculdade de Música do Espírito Santo Maurício de Oliveira, 2012.

Plano de Aula Oficina IV: Os Instrumentos Musicais

Data de aplicação: 16/09/2015

Elaboração: Edvan Ferreira dos Santos

Aplicado e elaborado para a 3ª série do Técnico em Administração Integrado ao Ensino Médio do IFSP Campus Birigui.

Objetivos

1. Refletir sobre o ensino das relações entre matemática e música;
2. Conhecer a organização e os instrumentos de uma orquestra;
3. Construir uma flauta pã com canudos de milk shake;
4. Avaliar os conhecimentos adquiridos.

Materiais

1. Lousa; 2. Projetor; 3. Notebook; 4. Caixa de som.

Metodologia

1. Reflexão sobre a importância da Matemática e da Música;
2. Naipes orquestrais e seus instrumentos;
3. Reprodução de vídeo “Bolero de Ravel”;
4. Construção da flauta pã;
5. Aplicação da avaliação final.

Avaliação

Dar-se-á pela observação da participação nos questionamentos, atividades propostas e análise posterior do videotape.

Referências

ABDOUNUR, O. J. Matemática e música: pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 2006.

CAMPOS, G. P. da S. Música e matemática na educação:é possível? Vitória: Faculdade de Música do Espírito Santo Maurício de Oliveira, 2012.