



Licenciatura em Matemática

Daniel Possetti

Números Complexos e Operadores Semissimples

BIRIGUI - SP
2015

Daniel Possetti

Números Complexos e Operadores Semissimples

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, *Campus* Birigui, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Ma. Manuella Ap. Felix de Lima

BIRIGUI - SP
2015

Daniel Possetti

Números Complexos e Operadores Semissimples

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, *Campus* Birigui, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Ma. Manuella Ap. Felix de Lima (orientadora)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - *Campus* Birigui

Profa. Ma. Livia Teresa Minami Borges

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - *Campus* Birigui

Prof. Dr. Régis Leandro Braguim Stábile

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - *Campus* Birigui

Birigui, ____ de _____ de _____.

Dedicatória

À minha mãe, Sônia (in memoriam), de quem tenho eternas saudades.

À minha filha, Nicole, na esperança de que um dia ela possa ler.

À minha esposa, Ivanete, pelo incentivo aos estudos e pela superação dos momentos difíceis.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela oportunidade concedida.

À minha orientadora, Manuella, deixo um imenso agradecimento pelo apoio constante na minha formação, pela profissionalidade exemplar de quem, incentiva e nos põe de pé e firmes no objetivo. Pela orientação habilmente conduzida e por acreditar na minha capacidade de concluir esse trabalho com sua orientação.

À banca examinadora, composta pelos docentes Livia e Régis, pelas contribuições inestimáveis para a consecução do trabalho.

Aos docentes: Ana Paula Ximenes Flores, Livia Teresa Minami Borges, Manuella Ap. Felix de Lima, Luiz Fernando da Costa Zonetti, Régis Leandro Braguim Stábile, Zionice Garbelini Martos Rodrigues, Luciane de Castro Quintiliano, Allan Victor Ribeiro, João da Mata Santos Filho, pelo conhecimento que adquiri nesses anos, pelas oportunidades e caminhos mostrados.

Ao Instituto Federal de São Paulo, pela oportunidade de formação gratuita e de qualidade.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.” (Karl Friedrich Gauss)

Resumo

Durante a graduação estudamos os Espaços Vetoriais Reais, entretanto, o mesmo não ocorre com Espaços Vetoriais Complexos. O estudo dos operadores semissimples, os quais são utilizados quando, no processo de diagonalização de um operador linear, nos deparamos com autovalores complexos, foi devido ao fato deste tema não ser abordado no curso de Licenciatura em Matemática do IFSP, *Campus* Birigui, e também por haver pouco material didático disponível sobre o assunto. Em um primeiro momento, foram estudadas as propriedades dos números complexos, suas operações, forma polar e a forma de *de Moivre*. Depois disso, passamos para os Espaços Vetoriais Complexos para, em seguida, tratarmos dos operadores semissimples. Neste contexto, quando trabalhamos com operadores lineares reais, \mathbb{R} -espaço vetorial, os conceitos de autovalor e autovetor se transportam sem problemas para operadores lineares complexos, \mathbb{C} -espaço complexo. Para tanto, utilizamos o chamado *Complexificado de um Operador*. Finalizamos o estudo com algumas aplicações dos assuntos abordados neste trabalho no âmbito teórico.

Palavras-chave: Números Complexos 1. Espaço Vetorial 2. Operadores Semissimples 3. Transformação Linear 4. Autovalor e Autovetor 5.

Abstract

During graduation, we studied the real vector spaces, however, the same does not occur with complex vector spaces. The study of semisimple operators, which are used when in the diagonalization of a linear operator process, we are faced with complex eigenvalues, was due to the fact that this issue was not addressed in the course of Mathematics at IFSP, *Campus* Birigui, and also due to the little educational material available on the subject. At first, the properties of complex numbers, their operations, polar form and the form of *de Moivre* were studied. After that, we moved to the complex vectorial spaces to then treat the semisimple operators. When we work with real linear operators, vector \mathbb{R} -space, the concepts of self-worth and eigenvector are transported without problems to complex linear operators, \mathbb{C} -space complex, to both use the Complexified called an Operator. We conclude the study with some applications of the issues addressed in this work in the theoretical framework.

Keywords: Complex Numbers 1. Vector Space 2. Semisimple Operators 3. Linear Transformation 4. Eigenvalue and Eigenvector 5.

Lista de Figuras

1.1	Aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R}'	20
1.2	Representação geométrica do número complexo	23
2.1	Multiplicação do vetor \vec{x} por λ	36
4.1	Representação geométrica de $ z \leq 3$	47
4.2	Representação geométrica de $ z < 1 - \text{Re}(z)$	48

Sumário

Introdução	11
1 Os Números Complexos	15
1.1 Conjunto dos números complexos	15
1.1.1 Operações com pares ordenados	15
1.1.2 Propriedades da adição	16
1.1.3 Subtração	16
1.1.4 Propriedades da multiplicação	17
1.1.5 Divisão	18
1.1.6 Propriedade distributiva	19
1.2 Forma Algébrica	19
1.3 Unidade imaginária	21
1.4 Conjugado	22
1.4.1 Conjugado na divisão	22
1.5 Módulo e argumento	23
1.5.1 Plano de Argand-Gauss	23
1.5.2 Argumento	24
1.5.3 Propriedades do módulo	24
1.5.4 Módulo do produto, do quociente e da soma	25
1.6 Forma trigonométrica	26
1.7 Potenciação de complexos	26
1.7.1 Módulo e argumento de produto	26
1.8 Primeira fórmula de <i>de Moivre</i>	28
1.9 Radiciação	28
1.9.1 Segunda fórmula de <i>de Moivre</i>	28
2 Espaços Vetoriais Complexos	30
2.1 Independência Linear	32
2.2 Bases	33
2.2.1 A base canônica de \mathbb{R}^n	33
2.2.2 A base canônica em $(\mathbb{C}; \mathbb{R})$ e $(\mathbb{C}; \mathbb{C})$	33
2.3 Transformações Lineares	34
2.3.1 Matriz de uma transformação linear	34
2.3.2 Multiplicação por z_0 como uma transformação linear	35
2.4 Autovalores e Autovetores	35
2.5 Diagonalização	36
2.5.1 Procedimento para diagonalizar uma matriz	40

3 Operadores Semissimples	41
3.1 O Complexificado de um operador	41
4 Aplicações	46
Referências Bibliográficas	53

Introdução

Nesta secção, utilizamos as referências [1], [2], [3] e [4].

Em algumas situações, nos deparamos em resolver equações do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Para isso utilizamos a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

para encontrarmos suas soluções.

Sabemos que, quando o valor do discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) for um número maior que zero, encontramos duas soluções possíveis e diferentes para a equação. Quando o discriminante for igual a zero, obtemos uma única solução, mas quando $b^2 - 4ac$ for um número negativo, concluimos que a equação não tem solução no conjunto dos números reais. Por exemplo, se tentarmos resolver a equação

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

em \mathbb{R} , encontraremos as soluções

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

e como o número $\sqrt{-4}$ não representa um número real, concluimos que a equação não tem solução em \mathbb{R} . Entretanto, podemos manipular o resultado anterior, onde obteremos,

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{-1}}{2} \implies x = 3 \pm \sqrt{-1}.$$

Ou seja, qualquer um dos resultados é solução para a equação $x^2 - 6x + 10 = 0$, desde que tratemos o símbolo $\sqrt{-1}$ como se fosse um número com a particularidade de que $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

De fato,

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 10 &= 0 \\ \implies (3 + \sqrt{-1})^2 - 6 \cdot (3 + \sqrt{-1}) + 10 & \\ &= 9 + 6\sqrt{-1} + (\sqrt{-1})^2 - 18 - 6\sqrt{-1} + 10 \\ &= 9 - 1 - 18 + 10 \\ &= 19 - 19 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De modo análogo, se $x = 3 - \sqrt{-1}$, verificamos que também é solução da equação.

O surgimento dos números complexos não está ligado à resolução das equações do 2º grau, cujas soluções são expressas por raízes quadradas, como vimos anteriormente.

No estudo das equações de 3º grau, na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, historicamente, buscava-se uma fórmula, envolvendo radicais, que expressasse as raízes. No século XVI, os italianos Tartaglia¹ e Cardano², entre outros, propuseram caminhos que conduziam a tal fórmula. Essa fórmula é pouco conhecida entre os que estudam matemática, muito diferentemente do caso das equações de 2º grau, em que a fórmula, denominada no Brasil como “Fórmula de Bhaskara”³ é amplamente conhecida. Sistemáticamente, o caminho seguido por Tartaglia e Cardano foi, de acordo com [3]:

“Dividindo-se todos os coeficientes por a , a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

pode ser transformada na forma equivalente

$$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

onde $B = \frac{b}{a}$, $C = \frac{c}{a}$ e $D = \frac{d}{a}$.

Fazendo-se $x = y - \frac{B}{3}$ (o denominador 3 corresponde ao grau da equação), a equação $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ pode ser reduzida a $y^3 + My + N = 0$, onde M e N podem ser determinados em termos de B, C e D .

Assim, para resolver uma equação completa de 3º grau, basta resolver a equação incompleta $y^3 + My + N = 0$, encontrando-se:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}}.$$

Logo, como $x = y - \frac{B}{3}$, obtemos os valores de x em termos de a, b, c e d .”

Vale lembrar que a equação só terá solução se

$$\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3 \geq 0.$$

Nesse contexto, o matemático italiano Rafael Bombelli⁴ foi quem conseguiu atravessar a barreira e chegar aos novos números.

Conforme seu próprio relato, em 1572 no livro “L’Algebra parte maggiore dell’Arithmetica”, a ideia surgiu ao tentar resolver a equação $x^3 - 15x = 4$. Porém, quando utilizou a fórmula de Cardano-Tartaglia, obteve a solução

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}} \\ x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \end{aligned}$$

¹Nicolo Tartaglia (1499-1557). Matemático italiano, cujo nome está ligado ao triângulo de Tartaglia e a solução da equação de terceiro grau.

²Girolamo Cardano (1501-1576). Matemático, médico e físico italiano, escreveu a importante obra *Ars Magna*, onde aparece pela primeira vez a fórmula da resolução de equações cúbicas.

³Bhaskara Askaria (1114-1185). Matemático indiano, professor, astrólogo e astrônomo. Foi um dos mais importantes matemáticos do século XII. Suas publicações contém vários problemas de equações lineares e quadráticas feitas em prosa.

⁴Rafael Bombelli (c. 1526-1573). Engenheiro hidráulico e matemático italiano. O mais importante da história da Itália, pioneiro no estudo sobre os números imaginários.

Assim, Bombelli chegou a um impasse. Por um lado, sabia que $x = 4$ era solução da equação $x^3 - 15x = 4$, por outro lado sabia que $\sqrt{-121}$ não existia. Logo, a equação não teria solução. Ele assume que os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Ou seja, existiam números reais, tais que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$.

Dessa forma, Bombelli chegou à conclusão que $a = 2$ e $b = 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ x &= (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

obtendo a solução desejada.

Depois de Bombelli, outros personagens importantes da História da Matemática deram contribuições ao desenvolvimento da teoria dos números complexos.

O matemático suíço Leonhard Euler⁵, propôs em 1727, a utilização do símbolo i para representar $\sqrt{-1}$ e avançou nos estudos de Bombelli. Euler também mostrou que as equações do tipo $z^n = w$ tinham n soluções no conjunto dos números complexos. Os matemáticos passaram a acreditar que toda equação de grau n deveria ter n raízes complexas. Também se deve a ele a notabilíssima fórmula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

que, para $x = \pi$, se transforma em

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da matemática. Por processos puramente formais, Euler chegou a um número enorme de relações curiosas, como

$$i^{-i} = e^{-\pi/2},$$

por exemplo. Vários matemáticos tentaram provar esta conjectura e Jean-le-Rond d'Alembert⁶ publicou, em 1746, algo que considerou uma prova. Entretanto um jovem matemático mostrou que tal prova era insatisfatória e ilusória e apresentou uma demonstração correta. Este matemático foi Karl Friedrich Gauss⁷, que aos 21 anos, apresentou o que ainda hoje é considerado a maior tese de doutorado em matemática de todos os tempos. Nela está a prova do Teorema Fundamental da Álgebra, cuja denominação foi dada pelo próprio Gauss. O teorema afirma que: **“Toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, pelo menos, uma raiz complexa”**.

Jean Robert Argand⁸ e Casper Wessel⁹, utilizaram a representação dos números complexos como

⁵Leonhard Euler (1707-1783). Matemático suíço, escritor político, sem dúvida insuperável quanto na história da matemática. Publicou 530 trabalhos durante sua vida, deixando ainda, ao morrer, uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais de quarenta e sete anos.

⁶Jean-Le-Rond D'Alembert (1717-1790). Matemático francês, tinha uma cultura muito vasta, prevalentemente em direito, medicina, matemática e ciência. Pioneiro no estudo das equações diferenciais parciais das cordas vibrantes, levando a equação $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Empenhou-se tanto em provar o teorema fundamental da álgebra, que o teorema é conhecido hoje na França como *teorema de d'Alembert*.

⁷Karl Friedrich Gauss (1772-1855). Matemático, físico e astrônomo alemão, foi o primeiro a conceber a possibilidade de existirem geometrias não euclidianas. Demonstrou o teorema fundamental da álgebra e criou a representação geométrica para os números complexos no plano.

⁸Jean Robert Argand (1768-1822). Matemático suíço, independentemente de Gauss também criou a representação geométrica de números complexos no plano e a de grandezas vetoriais através de linhas dirigidas.

⁹Caspar Wessel (1745-1818). Era um agrimensor, norueguês. Foi um dos primeiros autores a notar a associação entre números complexos e pontos reais do plano.

sendo segmentos orientados e operados algebricamente como vetores, para a qual houve maior aceitação no meio matemático.

Em 1800, com Argand e Wessel, usando um sistema de coordenadas retangulares, fez-se relacionar um complexo como um par ordenado, ou seja, $a + bi$ corresponderá ao ponto (a, b) , tendo-se convencionado que o eixo horizontal representaria os números reais e o eixo vertical, os números imaginários, assim chamado por Euler.

Com essas convenções, um número complexo $a + bi$ representaria um ponto (ou um vetor) no plano bidimensional que hoje é denominado de plano cartesiano Argand-Gauss.

Devido a toda essa importância histórica, decidimos fazer a pesquisa na temática dos Números Complexos. A proposta para este trabalho é um estudo e análise de tais tópicos, bem como a elaboração de um texto didático voltado a um estudante que esteja cursando o segundo ou terceiro ano de graduação. O estudo de tais tópicos proporcionará a oportunidade de aprender técnicas que não foram vistas em disciplinas cursadas, aprofundando o conhecimento na área.

O estudo dos operadores semissimples, foi devido ao fato deste tema não ser abordado no curso de Licenciatura em Matemática do IFSP, *Campus* Birigui, e também por haver pouco material didático disponível sobre o assunto.

No caso dos operadores semissimples, um estudo mais aprofundado sobre o tema possibilitará a criação de um texto didático que complemente a bibliografia disponível no sentido de mostrar mais aplicações e exemplos e que seja escrito em linguagem menos abstrata, sem fugir do rigor matemático, mais acessível aos alunos.

No Capítulo 1, abordaremos as propriedades dos números complexos, suas operações, formas de representação e a forma de *de Moivre*. Depois disso, no Capítulo 2, passamos para os Espaços Vetoriais Complexos onde estudamos as Bases, Independência Linear, Transformações Lineares e Autovalores e Autovetores, para, em seguida, no Capítulo 3, tratarmos dos operadores semissimples, que serão utilizados quando no processo de encontrar os autovalores, estes serão complexos. Neste contexto, quando trabalhamos com operadores lineares reais, \mathbb{R} -espaço vetorial, os conceitos de autovalor e autovetor se transportarão sem problemas para operadores lineares complexos, \mathbb{C} -espaço complexo. No Capítulo 4, finalizaremos o estudo com algumas aplicações dos assuntos abordados neste trabalho no âmbito teórico.

Capítulo 1

Os Números Complexos

Neste capítulo, no qual utilizamos as referências [4], [5], [6], [7] e [8], faremos a definição do conjunto dos números complexos, bem como suas operações, propriedades e formas de representação.

1.1 Conjunto dos números complexos

Definição 1.1. Chama-se conjunto dos números complexos, e representamos por \mathbb{C} , o conjunto de pares ordenados reais para os quais estão definidas as operações de igualdade, adição e multiplicação.

É usual representarmos cada elemento $(a, b) \in \mathbb{C}$ com o símbolo z , portanto

$$z \in \mathbb{C} \iff z = (x, y),$$

sendo $x, y \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Operações com pares ordenados

Definição 1.2. Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. Consideremos o produto cartesiano, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

ou seja, \mathbb{R}^2 é o conjunto de pares ordenados (x, y) em que x e y são números reais.

Tomemos dois elementos, (a, b) e (c, d) de \mathbb{R}^2 para dar três importantes definições:

a) igualdade: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, apresentam os primeiros e os segundos elementos iguais, respectivamente, ou seja

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d; \tag{1.1}$$

b) adição: chama-se *soma* de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro elemento e o segundo elemento, forem, respectivamente, a soma dos dois primeiros elementos e dos dois segundos elementos dos pares dados.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \tag{1.2}$$

c) multiplicação: denomina-se *produto* de dois pares ordenados um novo par ordenado cujo primeiro elemento é a diferença entre o produto dos primeiros elementos e o produto dos segundos elementos dos

pares ordenados dados e o segundo elemento é dado pela soma dos produtos do primeiro elemento de cada par dado pelo segundo elemento do outro.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (1.3)$$

1.1.2 Propriedades da adição

Teorema 1.1. *A operação de adição em \mathbb{C} verifica as seguintes propriedades:*

A-1: propriedade associativa

A-2: propriedade comutativa

A-3: existência do elemento neutro

A-4: existência do elemento simétrico

Demonstração.

A-1: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

A-2: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) \\ &= (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1. \end{aligned}$$

A-3: Existe $e_a \in \mathbb{C}$ tal que $z + e_a = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$

Fazendo $z = (a, b)$ e usando (1.1) e (1.2), provemos que $e_a = (x, y)$ é tal que $z + e_a = z$:

$$z + e_a = z \implies (a, b) + (x, y) = (a, b) \implies (a + x, b + y) = (a, b) \implies \begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, existe $e_a = (0, 0)$, chamado de elemento neutro de \mathbb{C} para a adição.

A-4: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}$ tal que $z + z' = e_a$

Fazendo $z = (a, b)$, $z' = (x, y)$ e usando (1.1) e (1.2) e a propriedade A-3, temos:

$$z + z' = e_a \implies (a, b) + (x, y) = (0, 0) \implies (a + x, b + y) = (0, 0) \implies \begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}.$$

Assim, existe o elemento simétrico de z , $z' = (-a, -b)$ que somado ao complexo $z = (a, b)$ dá como resultado $e_a = (0, 0)$. □

1.1.3 Subtração

Proposição 1.1. *Decorre do teorema anterior que, dados os complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, existe um único $z \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 + z = z_2$.*

Demonstração.

$$z_1 + z = z_2 \implies z'_1 + (z_1 + z) = z'_1 + z_2 \xrightarrow{A-1} (z'_1 + z_1) + z = z'_1 + z_2 \xrightarrow{A-4} e_a + z = z'_1 + z_2 \implies z = z_2 + z'_1.$$

□

Esse número z é chamado *diferença* entre z_1 e z_2 , e indicado por $z_2 - z_1$, portanto:

$$z_2 - z_1 = z_2 + z'_1 = (c, d) + (-a, -b) = (c - a, d - b).$$

Exemplo 1.1. $(7, 4) - (3, 2) = (7, 4) + (-3, -2) = (7 - 3, 4 - 2) = (4, 2)$.

1.1.4 Propriedades da multiplicação

Teorema 1.2. *A operação de multiplicação em \mathbb{C} verifica as seguintes propriedades:*

M-1: propriedade associativa

M-2: propriedade comutativa

M-3: existência do elemento neutro

M-4: existência do elemento inverso

Demonstração.

M-1: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$, para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) \\ &= [(ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e] \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= [a(ce - df) - b(de + cf), a(cf + de) + b(ce - df)] \\ &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) \\ &= (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] \\ &= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3). \end{aligned}$$

M-2: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) \\ &= (ca - db, cb + da) = (c, d) \cdot (a, b) = z_2 \cdot z_1. \end{aligned}$$

M-3: Existe $e_m \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot e_m = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$

Fazendo $z = (a, b)$ e usando (1.3) e (1.1), provemos que $e_m = (x, y)$ é tal que $z \cdot e_m = z$

$$z \cdot e_m = z \implies (a, b) \cdot (x, y) = (a, b) \implies (ax - by, ay + bx) = (a, b) \implies \begin{cases} ax - by = a & (I) \\ ay + bx = b. & (II) \end{cases}$$

Isolando x na equação (I) e substituindo na equação (II) obtemos,

$$\begin{aligned} ay + b \cdot \left(1 + \frac{b}{a}y\right) &= b \\ ay + b + \frac{b^2}{a}y &= b \\ a^2y + ab + b^2y &= ab \\ (a^2 + b^2)y &= 0 \\ y &= 0 \implies x \stackrel{y=0}{=} 1 + \frac{b}{a} \cdot 0 \implies x = 1. \end{aligned}$$

Assim, existe $e_m = (1, 0)$, chamado de elemento neutro da multiplicação.

M-4: Para todo $z \in \mathbb{C}^*$, existe um $z'' \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z'' = e_m$

Fazendo $z = (a, b)$, $z'' = (x, y)$ e usando as definições (1.3) e (1.1) e a propriedade M-3, temos:

$$z \cdot z'' = e_m \implies (a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \implies (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \implies \begin{cases} ax - by = 1 & (I) \\ ay + bx = 0. & (II) \end{cases}$$

Isolando x na equação (II) e substituindo na equação (I) temos,

$$\begin{aligned} a \left(-\frac{ay}{b}\right) - by &= 1 \\ -\frac{a^2}{b}y - by &= 1 \\ -a^2y - b^2y &= b \\ y(a^2 + b^2) &= -b \\ y &= -\frac{b}{a^2 + b^2} \\ \implies x &= -\frac{a}{b} \left(-\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \\ x &= \frac{a}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

portanto, existe $z'' = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$, chamado de inverso multiplicativo de z , que multiplicado por $z = (a, b)$ dá como resultado $e_m = (1, 0)$. Vale lembrar que a condição $a \neq 0$ e $b \neq 0$ equivale a $a^2 + b^2 \neq 0$, o que garante a existência de z'' . \square

1.1.5 Divisão

Proposição 1.2. *Decorre do teorema anterior que, dados os complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, existe um único $z \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 \cdot z = z_2$,*

Demonstração.

$$z_1 \cdot z = z_2 \implies z_1'' \cdot (z_1 \cdot z) = z_1'' \cdot z_2 \stackrel{M-1}{\implies} (z_1'' \cdot z_1) \cdot z = z_1'' \cdot z_2 \stackrel{M-3}{\implies} e_m \cdot z = z_1'' \cdot z_2 \stackrel{M-2}{\implies} z = z_2 \cdot z_1''.$$

\square

Esse número z é chamado *quociente* entre z_2 e z_1 , e indicamos por $\frac{z_2}{z_1}$; logo:

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1} &= z_2 \cdot z_1'' = (c, d) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \\ \frac{z_2}{z_1} &= \left(\frac{ca}{a^2 + b^2} - \frac{(-db)}{a^2 + b^2}, -\frac{cb}{a^2 + b^2} + \frac{da}{a^2 + b^2} \right) \\ \frac{z_2}{z_1} &= \left(\frac{ca + db}{a^2 + b^2}, \frac{da - cb}{a^2 + b^2} \right).\end{aligned}$$

1.1.6 Propriedade distributiva

Proposição 1.3. *Em \mathbb{C} , a operação de multiplicação é distributiva com relação à adição, ou seja:*

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned}z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\ &= [a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)] \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= [(ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)] \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) \\ &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.\end{aligned}$$

□

A soma (+) e produto (\cdot) de números reais gozam de um conjunto de propriedades que dão a \mathbb{R} estrutura de corpo. Tais propriedades continuam a ser satisfeitas pela soma e produto definidos no conjunto dos números complexos. Assim, o conjunto dos números complexos continua a ter uma estrutura algébrica de corpo.

1.2 Forma Algébrica

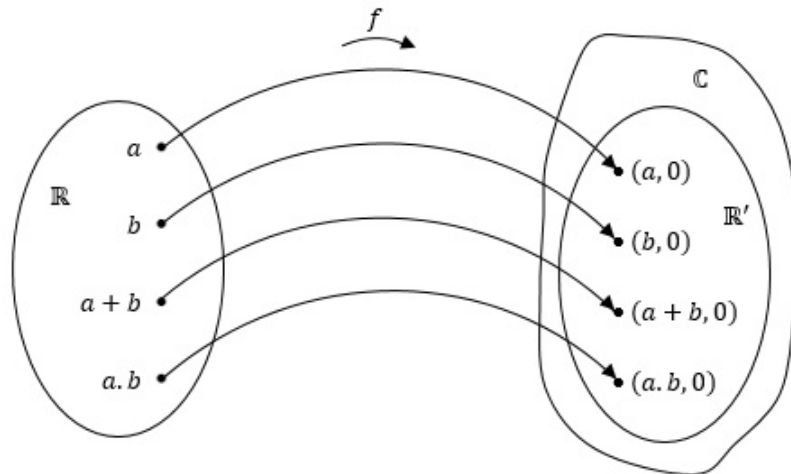
Consideremos o conjunto

$$R' = \{(a, b) \in \mathbb{C} \mid b = 0\}.$$

Notemos que $(0, 0) \in R'$ e $(1, 0) \in R'$; além disso, se $(a, 0)$ e $(b, 0)$ são dois elementos quaisquer de R' , tem-se:

- a) $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$;
- b) $-(a, 0) = (-a, 0)$;
- c) $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$.

Consideremos, agora, a operação f , de \mathbb{R} em R' , que leva cada $x \in \mathbb{R}$ ao par $(x, 0) \in R'$:

Figura 1.1: Aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R}'

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}' \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

É imediato que a aplicação f , de \mathbb{R} em \mathbb{R}' , definida por $f(x) = (x, 0)$ é bijetiva, pois

- todo par $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ é o correspondente, segundo a função f , de $x \in \mathbb{R}$ (isto implica em f ser sobrejetora);
- dados $x \in \mathbb{R}$ e $x' \in \mathbb{R}'$, com $x \neq x'$, os seus correspondentes $(x, 0) \in \mathbb{R}$ e $(x', 0) \in \mathbb{R}'$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados (isto quer dizer que f é injetora).

Devido ao fato de existir uma aplicação bijetora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ que conserva as operações de adição e multiplicação,

- $f(a+b) = (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$ e
- $f(a.b) = (a.b, 0) = (a.b + 0.0, a.0 + b.0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a).f(b)$.

dizemos que a aplicação f é um isomorfismo de \mathbb{R} em \mathbb{R}' . Pelo isomorfismo, operar com $(x, 0)$ nos leva a resultados análogos aos de operações com x . Assim, podemos dizer que:

$$x = (x, 0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sendo aceita essa igualdade, em particular temos que $0 = (0, 0)$; $1 = (1, 0)$ e $\mathbb{R} = \mathbb{R}'$. Dessa forma, o corpo \mathbb{R} dos números reais passa a ser um subconjunto do corpo \mathbb{C} dos números complexos:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Convém dar um nome e um símbolo ao par $(0, 1)$. Este par será a chamada *unidade imaginária*, indicada por i .

Definição 1.3. Dado um número complexo $z = (x, y)$, temos:

$$\begin{aligned}
z &= (x + 0, y + 0) = (x, 0) + (0, y) \\
z &= (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\
z &= (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \\
z &= (x, 0) + (y, 0) \cdot i
\end{aligned}$$

isto é,

$$z = x + y \cdot i. \quad (1.4)$$

Assim, todo número complexo da forma $z = (x, y)$ pode ser escrito sob a forma $z = x + y \cdot i$, chamada de *forma algébrica*.

O número real x é chamado de parte real de z e o número real y é chamado de parte imaginária de z . Denotamos por:

$$z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \cdot i. \quad (1.5)$$

Definição 1.4. Chama-se *real* todo complexo cuja parte imaginária for nula ($z = \operatorname{Re}(z)$) e *imaginário puro* todo número complexo cuja parte real for nula ($z = \operatorname{Im}(z)$). Assim,

- real: $z = x + 0 \cdot i = x$;
- imaginário puro: $z = 0 + y \cdot i = y \cdot i$.

1.3 Unidade imaginária

Como já mencionamos anteriormente, chamamos *unidade imaginária* e indicamos por i o número complexo $(0, 1)$.

Notemos que:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

isto é, a propriedade básica da unidade imaginária é:

$$i^2 = -1. \quad (1.6)$$

Sem perda de generalidade, aplicando a propriedade associativa da multiplicação, temos

- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$;
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$.

Proposição 1.4. De forma mais geral, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

- a) $i^{4n} = 1$;
- b) $i^{4n+1} = i$;
- c) $i^{4n+2} = -1$;
- d) $i^{4n+3} = -i$.

Demonstração.

- a) $i^{4n} = (i^4)^n = (1)^n \stackrel{n \in \mathbb{N}}{=} 1$.

- b) $i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i$.
 c) $i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.
 d) $i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$. □

1.4 Conjugado

Definição 1.5. Chama-se conjugado de um número complexo $z = x + yi$ o número complexo $\bar{z} = x - yi$.

É imediato que o complexo conjugado de \bar{z} é z ; por causa disso, diremos que z e \bar{z} são números complexos conjugados. Temos o seguinte teorema que nos dá as propriedades mais importantes dos conjugados de números complexos:

Teorema 1.3. Se z_1 e z_2 são números complexos quaisquer, temos:

- a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
 b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
 c) $\overline{\bar{z}} = z$;
 d) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ e $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z) \cdot i$;
 e) $\bar{z} = z$ se e, somente se, z é real.

Demonstração. Sejam $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$, números complexos, temos:

- a) $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, assim:

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

- b) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i + y_1y_2i^2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$, assim:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i = x_1x_2 - y_1y_2 - x_1y_2i - x_2y_1i \\ &= x_1x_2 + y_1y_2i^2 - x_1y_2i - x_2y_1i = (x_1x_2 - x_1y_2i) + (-x_2y_1i + y_1y_2i^2) \\ &= x_1(x_2 - y_2i) - y_1i(x_2 - y_2i) = (x_1 - y_1i) \cdot (x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2. \end{aligned}$$

- c) $z = x + yi \implies \bar{z} = x - yi \implies \overline{\bar{z}} = x + yi = z$.

- d) $z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x + yi - yi = 2x = 2\text{Re}(z)$;
 $z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi = 2\text{Im}(z) \cdot i$.

- e) $\bar{z} = z \iff (x - yi) = (x + yi) \iff \begin{cases} x = x \\ -y = y \end{cases} \iff 2y = 0 \iff y = 0 \iff z \in \mathbb{R}$. □

1.4.1 Conjugado na divisão

Vimos na subsecção 1.1.5 como calcular o quociente de dois números complexos. Agora, apresentaremos um processo mais prático e muito utilizado, baseado no fato de que:

$$z\bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

Definição 1.6. Dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1} &= \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di) \cdot (a - bi)}{(a + bi) \cdot (a - bi)} \\ \frac{z_2}{z_1} &= \frac{ac - bci + adi + bd}{a^2 + b^2} \\ \frac{z_2}{z_1} &= \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \cdot i.\end{aligned}$$

Ou seja, para calcular $\frac{z_2}{z_1}$ basta multiplicar o numerador pelo conjugado do denominador.

1.5 Módulo e argumento

1.5.1 Plano de Argand-Gauss

As noções de módulo e argumento tornam-se mais concretas quando representamos os números complexos $z = x + yi = (x, y)$ pelos pontos do plano cartesiano xOy com a convenção de marcarmos sobre os eixos Ox e Oy , respectivamente, a parte real e a parte imaginária de z .

Assim, consideremos o número complexo, não nulo, $z = x + yi$, representado na figura pelo ponto $P(x, y)$ e o ângulo θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), formado por \overrightarrow{OP} com o eixo Ox .

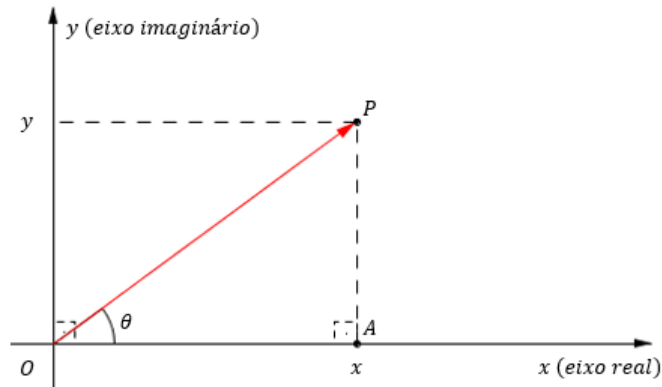


Figura 1.2: Representação geométrica do número complexo

Do triângulo retângulo OAP , temos:

$$\begin{aligned}OP^2 &= OA^2 + AP^2 \\ OP^2 &= x^2 + y^2 \\ OP &= \sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Além disso, indicaremos a medida do segmento \overline{OP} pela letra grega ρ . Logo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ao número ρ , chamaremos de módulo de z , indicando por:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.7)$$

Geometricamente, ρ nos dá a distância do afixo P à origem do plano cartesiano.

Nota: Se $z = 0 + 0i$, então $|z| = 0$.

1.5.2 Argumento

Definição 1.7. Chama-se *argumento* de z , e indicaremos por $\arg(z)$, a medida do ângulo θ , tomado no sentido anti-horário.

Tomemos como base a Figura 1.2. Temos,

$$\cos\theta = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{\rho} \implies \cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad (1.8)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{PA}{OP} = \frac{y}{\rho} \implies \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} \quad (1.9)$$

onde determinamos a medida de θ .

Notemos que:

1º) A condição $z \neq 0$ garante $\rho \neq 0$.

2º) Existe, ao menos, um ângulo θ satisfazendo a definição anterior, pois:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} = \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

3º) Fixado o complexo $z \neq 0$, estão fixados $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, mas o ângulo θ pode assumir infinitos valores, congruentes dois a dois. Assim, o complexo $z \neq 0$ tem argumento

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

em que θ_0 é chamado *argumento principal* de z , e é tal que $\cos\theta_0 = \frac{x}{\rho}$, $\operatorname{sen}\theta_0 = \frac{y}{\rho}$ e $\theta \leq \theta_0 \leq 2\pi$.

1.5.3 Propriedades do módulo

Teorema 1.4. Se $z = x + yi$ é um número complexo qualquer, então:

- a) $|z| \geq 0$
- b) $|z| = 0 \iff z = 0$
- c) $|z| = |\bar{z}|$
- d) $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
- e) $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

Demonstração.

a) Se $z = x + yi$, então $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$, temos $x^2 + y^2 \geq 0$. Logo $|z| \geq 0$.

b) Pelo item anterior, $|z| = 0$, então $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$. Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos, $x^2 + y^2 = 0$ se, e somente se, $x = y = 0$. Portanto, $z = 0$.

c) Sabemos que $y^2 = (-y)^2$, assim $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\bar{z}|$.

d) Se $\begin{cases} x \geq 0 \implies x = |x| \\ x < 0 \implies x < |x| \end{cases}$, então $x \leq |x|$ (I).

Por outro lado, se

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \implies \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \implies |x| \leq |z| \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), vem:

$$x \stackrel{(I)}{\leq} |x| \stackrel{(II)}{\leq} |z| \implies \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|.$$

e) Se $\begin{cases} y \geq 0 \implies y = |y| \\ y < 0 \implies y < |y| \end{cases}$, então $y \leq |y|$ (II).
Por outro lado, se

$$y^2 \leq x^2 + y^2 \implies \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \implies |y| \leq |z| \quad (IV)$$

Comparando (III) e (IV), temos:

$$y \stackrel{(III)}{\leq} |y| \stackrel{(IV)}{\leq} |z| \implies \operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

□

1.5.4 Módulo do produto, do quociente e da soma

Teorema 1.5. *Se z_1 e z_2 são dois números complexos quaisquer, então:*

- a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
b) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, ($z_2 \neq 0$);
c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Demonstração. Conforme item 1.4.1 e o Teorema 1.3, item b), $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ e $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, respectivamente. Utilizando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação, vem:

a)

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2|^2 &= (z_1 z_2) \cdot (\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2) \cdot (\bar{z}_1 \bar{z}_2) = z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ &= (z_1 \bar{z}_1) \cdot (z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \\ &\implies |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

b) Note, inicialmente, que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z_2} \right| &= \left| \frac{1}{x + yi} \right| = \left| \frac{(x - yi)}{(x + yi) \cdot (x - yi)} \right| = \left| \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \right| \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{|z_2|}. \end{aligned}$$

Temos, então:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

c) Para essa demonstração, utilizaremos as equações (1.8), (1.9) e o fato de que $z = x + yi$.

Segue que,

$$x = \rho \cos \theta \text{ e } y = \rho \sin \theta.$$

Então,

$$z_1 + z_2 = (\rho_1 \cos \theta_1 + \rho_1 \operatorname{sen} \theta_1 i) + (\rho_2 \cos \theta_2 + \rho_2 \operatorname{sen} \theta_2 i) = (\rho_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \cos \theta_2) + i(\rho_1 \operatorname{sen} \theta_1 + \rho_2 \operatorname{sen} \theta_2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= \sqrt{(\rho_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \cos \theta_2)^2 + (\rho_1 \operatorname{sen} \theta_1 + \rho_2 \operatorname{sen} \theta_2)^2} \\ |z_1 + z_2| &= \sqrt{\rho_1^2 \cos^2 \theta_1 + 2\rho_1 \rho_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \rho_2^2 \cos^2 \theta_2 + \rho_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1 + 2\rho_1 \rho_2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \rho_2^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2} \\ |z_1 + z_2| &= \sqrt{\rho_1^2 (\operatorname{sen}^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \rho_2^2 (\operatorname{sen}^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) + 2\rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)}. \end{aligned}$$

Note que $\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$, logo,

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

E, como $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ é no máximo 1, temos:

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cdot 1} = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2} = \rho_1 + \rho_2 = |z_1| + |z_2|.$$

Portanto, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. □

1.6 Forma trigonométrica

Definição 1.8. Consideremos um complexo, não nulo, $z = x + yi$, com x e y reais, de módulo ρ e argumento θ .

Sabemos que $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \operatorname{sen} \theta$.

Substituindo os valores acima em $z = x + yi$, obtemos;

$$z = \rho \cos \theta + i \cdot \rho \operatorname{sen} \theta = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

e, portanto,

$$z = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \tag{1.10}$$

Esta forma de representar um complexo, é chamada *forma trigonométrica* ou *polar* de z .

1.7 Potenciação de complexos

1.7.1 Módulo e argumento de produto

Teorema 1.6. O módulo do produto de dois números complexos, é igual ao produto dos módulos dos fatores e seu argumento é congruente à soma dos argumentos dos fatores.

Demonstração. Suponhamos dados os complexos,

$$z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \text{ e } z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2).$$

Calculemos o módulo e o argumento de $z = z_1 \cdot z_2 = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Temos,

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 (\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1) \cdot \rho_2 (\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + i.\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2 \cos\theta_1) \\
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\rho(\cos\theta + i.\text{sen}\theta) = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

e

$$\begin{cases} \rho = \rho_1 \rho_2 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Portanto,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (1.11)$$

□

A fórmula que acabamos de deduzir pode ser estendida para o produto de n fatores ($n > 2$), aplicando a propriedade associativa da multiplicação.

De fato,

$$z = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\theta).$$

Então,

$$\begin{aligned}
z &= \rho_1 (\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1) \cdot \rho_2 (\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2) \cdot \dots \cdot \rho_n (\cos\theta_n + i.\text{sen}\theta_n) \\
z &= \rho_1 \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n \cdot (\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2) \cdot \dots \cdot (\cos\theta_n + i.\text{sen}\theta_n) \\
z &= \underbrace{\rho_1 \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n}_{n \text{ fatores}} \cdot \left[\cos \left(\underbrace{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}_{n \text{ parcelas}} \right) + i.\text{sen} \left(\underbrace{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}_{n \text{ parcelas}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\rho(\cos\theta + i.\text{sen}\theta) = \rho_1 \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

e

$$\begin{cases} \rho = \rho_1 \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Isto é, o módulo do produto de n números complexos, é igual ao produto dos fatores e seu argumento é congruente à soma dos argumentos dos fatores.

Veremos no próximo teorema como podemos simplificar a operação de potenciação com números complexos. Tal teorema é conhecido como Primeira Fórmula de *de Moivre*¹.

1.8 Primeira fórmula de *de Moivre*

Teorema 1.7. *Dado o número complexo $z = \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\theta)$, não nulo, e o número inteiro n , temos:*

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i.\text{sen}(n\theta)]. \quad (1.12)$$

Demonstração. 1ª parte: Provemos, usando o Princípio de Indução Finita (P.I.F.), que a propriedade é válida para $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Temos,

a) Se $n = 0$, então $z^0 = \rho^0 \cdot [\cos(0.\theta) + i.\text{sen}(0.\theta)] \implies z^0 = 1$.

b) Suponhamos que a fórmula seja válida para $n = k - 1$ e provemos a validade para $n = k$. Assim,

$$\begin{aligned} z^{k-1} &= \rho^{k-1} \cdot [\cos(k-1)\theta + i.\text{sen}(k-1)\theta] \\ \implies z^k &= z^{k-1} \cdot z = \rho^{k-1} \cdot [\cos(k-1)\theta + i.\text{sen}(k-1)\theta] \cdot \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\theta) \\ z^k &= (\rho^{k-1} \cdot \rho) \cdot [\cos(k-1)\theta + i.\text{sen}(k-1)\theta] \cdot [\cos\theta + i.\text{sen}\theta] \\ z^k &= (\rho^{k-1} \cdot \rho) \cdot \{\cos[(k-1)\theta + \theta] + i.\text{sen}[(k-1)\theta + \theta]\} \\ z^k &= \rho^k \cdot [\cos(k\theta - \theta + \theta) + i.\text{sen}(k\theta - \theta + \theta)] \\ z^k &= \rho^k \cdot [\cos(k\theta) + i.\text{sen}(k\theta)]. \end{aligned}$$

Assim, pelo P.I.F. temos que (1.12) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

2ª parte: Faremos uma extensão da propriedade para $n \in \mathbb{Z}$. Se $n < 0$, então $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$; portanto a m se aplica a fórmula

$$\begin{aligned} z^n &= z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\rho^m \cdot [\cos(m\theta) + i.\text{sen}(m\theta)]} \\ z^n &= \frac{1 \cdot [\cos(m\theta) - i.\text{sen}(m\theta)]}{\rho^m \cdot [\cos(m\theta) + i.\text{sen}(m\theta)] \cdot [\cos(m\theta) - i.\text{sen}(m\theta)]} \\ z^n &= \frac{1 \cdot [\cos(m\theta) - i.\text{sen}(m\theta)]}{\rho^m \cdot [\cos^2(m\theta) + \text{sen}^2(m\theta)]} \\ z^n &= \rho^{-m} \cdot \cos(-m\theta) + i.\text{sen}(-m\theta) \\ z^n &= \rho^n \cdot \cos(n\theta) + i.\text{sen}(n\theta) \end{aligned}$$

Portanto, (1.12) se aplica para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

1.9 Radiciação

1.9.1 Segunda fórmula de *de Moivre*

Teorema 1.8. *Dados o número complexo $z = \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\theta)$ e o número natural n ($n \geq 2$), então existem n raízes enésimas de z que são da forma:*

¹Abraham de Moivre (1667-1754). Foi um matemático francês, famoso pela Fórmula de *de Moivre*, que relaciona os números complexos com a trigonometria e por seus trabalhos na distribuição normal e na teoria das probabilidades.

$$w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad (1.13)$$

em que $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}_+$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Queremos determinar os valores complexos da forma $w = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)$ de modo que $z = w^n$, ou seja,

$$[r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)]^n = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta).$$

Assim, pelo Teorema 1.7, temos

$$r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \cdot \text{sen}(n\alpha)) = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta).$$

Da igualdade, vem

$$r^n = \rho \implies r = \sqrt[n]{\rho}$$

e

$$\begin{cases} \cos(n\alpha) = \cos\theta \\ \text{sen}(n\alpha) = \text{sen}\theta \end{cases} \implies n\alpha = \theta + 2k\pi \implies \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right],$$

com $k \in \mathbb{Z}$ e $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}_+$. □

Capítulo 2

Espaços Vetoriais Complexos

Neste capítulo utilizamos as referências [9], [10] e [11].

Em geral, a Álgebra Linear é o ramo da Matemática que trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto, mais uma noção de combinação linear de elementos desse conjunto. Nesta seção vamos definir o objeto matemático que, como a experiência mostrou, é a abstração mais útil e interessante deste tipo de sistema algébrico, o espaço vetorial em que os escalares podem ser números complexos denominado **Espaço Vetorial Complexo**.

Definição 2.1. Se n for um número inteiro positivo, então uma n -upla complexa é uma sequência de n números complexos (v_1, v_2, \dots, v_n) . O conjunto de todas as n -uplas complexas é denominado espaço complexo de dimensão n e é denotado por \mathbb{C}^n .

Os escalares de um espaço vetorial podem ser números reais ou complexos. Os espaços vetoriais com escalares reais são denominados **espaços vetoriais reais**, e aqueles com escalares complexos, são ditos **espaços vetoriais complexos**, que chamamos de \mathbb{C} -espaço vetorial.

Definição 2.2. Um espaço vetorial é um conjunto \mathbb{V} , não vazio, com duas operações usuais: soma, $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \xrightarrow{+} \mathbb{V}$, e multiplicação por escalar, $\mathbb{C} \times \mathbb{V} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{V}$, tais que, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, as propriedades da Proposição a seguir sejam satisfeitas.

Proposição 2.1. Se \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são vetores em \mathbb{V} e se α e β são escalares reais, então:

$$A_1 : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \text{ (comutativa)}$$

$$A_2 : \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \text{ (associativa)}$$

$A_3 : \text{existe em } \mathbb{V} \text{ um vetor, } \vec{0}, \text{ tal que } \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \text{ (elemento neutro), onde } \vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \text{ é o vetor nulo}$

$$A_4 : \text{para cada vetor } \vec{v} \in \mathbb{V} \text{ existe um vetor, } -\vec{v} \in \mathbb{V}, \text{ tal que } \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \text{ (elemento oposto)}$$

$$M_1 : \alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \text{ (distributiva)}$$

$$M_2 : (\alpha + \beta) \vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v} \text{ (distributiva)}$$

$$M_3 : (\alpha\beta) \vec{v} = \alpha (\beta \vec{v}) \text{ (associativa)}$$

$$M_4 : 1 \vec{v} = \vec{v} \text{ (elemento neutro da multiplicação)}.$$

Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{V} = \mathbb{R}$, dizemos que $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real (\mathbb{R} -espaço vetorial). Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{V} = \mathbb{C}$, dizemos que $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo (\mathbb{C} -espaço vetorial).

Demonstração. Para cada um dos itens, consideremos os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. Temos que, usando o fato de \mathbb{R} ser um espaço vetorial, então:

$$A_1 : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) + (u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{v} + \vec{u}. \end{aligned}$$

$$A_2 : \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + [(v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n)] \\ &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \\ &= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2, \dots, u_n + v_n + w_n) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &= [(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n)] + (w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &= (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}. \end{aligned}$$

$$A_3 : \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{0} &= (v_1, v_2, \dots, v_n) + (0, 0, \dots, 0) = (v_1 + 0, v_2 + 0, \dots, v_n + 0) \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_n) = \vec{v}. \end{aligned}$$

$$A_4 : \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} + (-\vec{v}) &= (v_1, v_2, \dots, v_n) + (-v_1, -v_2, \dots, -v_n) = (v_1 - v_1, v_2 - v_2, \dots, v_n - v_n) \\ &= (0, 0, \dots, 0) = \vec{0}. \end{aligned}$$

$$M_1 : \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha[(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n)] = \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \\ &= [\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2), \dots, \alpha(u_n + v_n)] = (\alpha u_1 + \alpha v_1, \alpha u_2 + \alpha v_2, \dots, \alpha u_n + \alpha v_n) \\ &= (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n) + (\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_n) = \alpha(u_1, u_2, \dots, u_n) + \alpha(v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}. \end{aligned}$$

$$M_2 : (\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\vec{v} &= (\alpha + \beta) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = [(\alpha + \beta)v_1, (\alpha + \beta)v_2, \dots, (\alpha + \beta)v_n] \\ &= (\alpha v_1 + \beta v_1, \alpha v_2 + \beta v_2, \dots, \alpha v_n + \beta v_n) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_n) + (\beta v_1, \beta v_2, \dots, \beta v_n) \\ &= \alpha(v_1, v_2, \dots, v_n) + \beta(v_1, v_2, \dots, v_n) = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}. \end{aligned}$$

$$M_3 : (\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$$

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)\vec{v} &= (\alpha\beta)(v_1, v_2, \dots, v_n) = (\alpha\beta v_1, \alpha\beta v_2, \dots, \alpha\beta v_n) \\
&= \alpha(\beta v_1, \beta v_2, \dots, \beta v_n) = \alpha[\beta(v_1, v_2, \dots, v_n)] \\
&= \alpha(\beta\vec{v}).
\end{aligned}$$

$$M_4 : 1\vec{v} = \vec{v}$$

$$1\vec{v} = 1.(v_1, v_2, \dots, v_n) = (1v_1, 1v_2, \dots, 1v_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \vec{v}.$$

□

Qualquer vetor

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = (a_1 + b_1i, a_2 + b_2i, \dots, a_n + b_ni)$$

em \mathbb{C}^n , pode ser dividido nas **partes real e imaginária** como

$$\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + i(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

que denotamos por

$$\vec{v} = \text{Re}(\vec{v}) + i\text{Im}(\vec{v}). \quad (2.1)$$

E de forma análoga, o **conjugado complexo do vetor v** , é dado por

$$\overline{\vec{v}} = \text{Re}(\vec{v}) - i\text{Im}(\vec{v}). \quad (2.2)$$

2.1 Independência Linear

Definição 2.3. Sejam \mathbb{V} um espaço vetorial sobre \mathbb{C} e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{V}$. Dizemos que o conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset \mathbb{V}$ é **Linearmente Independente (L.I.)**, se, e somente se, toda combinação linear da forma:

$$\sum_{i=1}^n z_i \vec{v}_i = \vec{0}; \quad z_i \in \mathbb{C} \text{ e } \vec{v}_i \in \mathbb{V} \quad (2.3)$$

tem apenas a solução trivial, ou seja, $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$. Do mesmo modo, dizemos que o conjunto S é **Linearmente Dependente (L.D.)** se, e somente se, toda combinação linear nula, como da Equação (2.3), tiver ao menos um $z_i \neq 0$, ou seja, existirem outras soluções além da trivial.

Exemplo 2.1. Decida se o conjunto $S = \{(1 - i, i), (2, 1 + i)\}$ é **L.I.** ou **L.D.**, considerando \mathbb{C}^2 como o espaço vetorial complexo.

Solução: Considerando a combinação linear nula:

$$z_1(1 - i, i) + z_2(2, 1 + i) = (0, 0) \text{ onde } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

obtemos o seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{cases} (1-i)z_1 + 2z_2 = 0 \\ i.z_1 + (1+i)z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + (3+i)z_2 = 0 \\ i.z_1 + (1+i)z_2 = 0 \end{cases}.$$

Note que o segundo sistema linear homogêneo foi obtido somando a segunda equação à primeira equação.

Tomando o segundo sistema linear homogêneo e multiplicando a primeira equação por $-i$ e somando à segunda equação, obtemos

$$\begin{cases} z_1 + (3+i)z_2 = 0 \\ (2-2i)z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0. \end{cases}$$

Portanto, o conjunto é **L.I.**

2.2 Bases

Definição 2.4. Se \mathbb{V} for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ for um conjunto finito de vetores em \mathbb{V} dizemos que S é uma base de \mathbb{V} se valerem as duas condições a seguir:

- S é L.I.;
- S gera \mathbb{V} , ou seja, qualquer vetor $\vec{v} \in \mathbb{V}$ se escreve como combinação linear dos elementos $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in S$.

2.2.1 A base canônica de \mathbb{R}^n

Sabemos que a base canônica em \mathbb{R}^3 é dada pelos vetores unitários

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0) \text{ e } \vec{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Isto é,

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0) \text{ e } \vec{k} = (0, 0, 1). \quad (2.4)$$

Podemos fazer uma extensão deste conceito para vetores em \mathbb{R}^n . À saber, os vetores unitários canônicos da forma

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

geram \mathbb{R}^n e, sabemos que são L.I. Dessa forma, essa é uma base de \mathbb{R}^n que denominamos **base canônica de \mathbb{R}^n** .

2.2.2 A base canônica em $(\mathbb{C}; \mathbb{R})$ e $(\mathbb{C}; \mathbb{C})$

Considerando $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ como um espaço vetorial real, é fácil mostrar que o conjunto $\beta = \{1, i\}$ é uma base de \mathbb{C} .

Sabemos que todo elemento $z \in \mathbb{C}$ é escrito como combinação linear dos elementos do conjunto β , com coeficiente reais. Além disso, o conjunto β é L.I. De fato, escrevendo a combinação linear nula

$$a + bi = 0 + 0i \text{ para } a, b \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

temos $a = 0$ e $b = 0$. Portanto, mostramos que o conjunto β é L.I., sendo, portanto, uma base para \mathbb{C} como espaço vetorial real.

Porém, a multiplicação usual de números complexos pode ser usada para dar a \mathbb{C} uma estrutura de \mathbb{C} -espaço vetorial; a soma em \mathbb{C} continua a mesma e a multiplicação por um escalar $\lambda = a + bi$ do vetor $\vec{v} = x + yi$ pode ser encarada como a multiplicação usual de números complexos:

$$\lambda \cdot \vec{v} = (a + bi) \cdot (x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i.$$

Uma base de \mathbb{C} como \mathbb{C} -espaço vetorial é $\{1\}$.

2.3 Transformações Lineares

Definição 2.5. Se $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ for uma função de um espaço vetorial \mathbb{V} num espaço vetorial \mathbb{W} , então T é denominada transformação linear (T.L.) de \mathbb{V} em \mathbb{W} se para quaisquer vetores \vec{u} e \vec{v} em \mathbb{V} e qualquer escalar k , forem válidas as seguintes propriedades:

i) $T(k \cdot \vec{v}) = k \cdot T(\vec{v})$ (homogeneidade);

(2.6)

ii) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ (aditividade).

No caso especial em que $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ a T.L. é denominada operador linear do espaço vetorial \mathbb{V} .

Observação 2.1. Podemos, ainda, combinar as duas propriedades:

$$T(k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2) = k_1 T(\vec{v}_1) + k_2 T(\vec{v}_2).$$

Teorema 2.1. Se $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ for uma T.L., então:

a) $T(\vec{0}) = \vec{0}$;

b) $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$.

Demonstração.

a) Seja $\vec{u} \in \mathbb{V}$. Como $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$, segue da homogeneidade que:

$$T(\vec{0}) = T(0 \cdot \vec{u}) = 0 \cdot T(\vec{u}) = \vec{0}.$$

b) Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$, temos

$$\begin{aligned} T(\vec{u} - \vec{v}) &= T(\vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}) = T(\vec{u}) + T((-1) \cdot \vec{v}) \\ &= T(\vec{u}) - 1 \cdot T(\vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v}). \end{aligned}$$

□

2.3.1 Matriz de uma transformação linear

Definição 2.6. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Escolhemos bases $\mathcal{B}_V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ para V e $\mathcal{B}_W = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ para W . Então, cada vetor $x \in V$ se escreve com relação à base \mathcal{B}_V na forma

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,$$

para alguns escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Daí, segue que

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(x_i).$$

Escrevemos os vetores $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ em relação à base \mathcal{B}_W na forma

$$T(x_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} y_j, \tag{2.7}$$

isto é, na forma de uma matriz coluna:

$$T(x_i) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

A matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é chamada a **representação matricial** da transformação linear T com relação às bases \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W . Esta representação de T denotaremos por $[T]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}$.

2.3.2 Multiplicação por z_0 como uma transformação linear

Definição 2.7. Fixado um número complexo $z_0 = a + bi$, definimos a transformação linear $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto z_0 \cdot w \end{aligned}$$

$$T(w) = z_0 w. \tag{2.9}$$

Aplicando à base canônica $Can = \{1, i\}$ de \mathbb{C} , temos:

$$T(1) = (a + bi) \cdot 1 = a + bi, \quad T(i) = (a + bi) \cdot i = -b + ai.$$

ou seja,

$$[T]_{Can} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

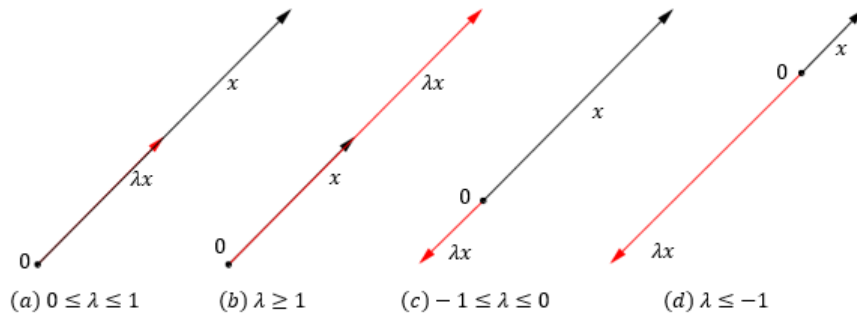
2.4 Autovalores e Autovetores

Definição 2.8. Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo \vec{x} em \mathbb{R}^n é denominado autovetor de A se $A\vec{x}$ for múltiplo escalar de \vec{x} , ou seja:

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}, \tag{2.11}$$

para algum escalar λ . O escalar λ é denominado autovalor de A e dizemos que \vec{x} é um autovetor associado a λ .

Em geral, quando multiplicamos um vetor \vec{x} por uma matriz quadrada A , o vetor resultante difere tanto em magnitude quanto em direção e sentido de \vec{x} . No caso especial em que \vec{x} é autovetor de A , a multiplicação não altera a direção. Veja a Figura 2.1.

Figura 2.1: Multiplicação do vetor \vec{x} por λ

Proposição 2.2. *Se A for uma matriz $n \times n$, então λ é um autovalor de A se, e só se, λ satisfaz a equação*

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (2.12)$$

A Equação (2.12), chamamos de **polinômio característico** de A e denotaremos por $p_A(\lambda)$.

Demonstração. Da Equação (2.11), multiplicando pela matriz identidade em ambos os membros, temos

$$A\vec{x} = \lambda I\vec{x} \implies \lambda I\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0} \implies \vec{x}(\lambda I - A) = \vec{0}. \quad (2.13)$$

Para que λ seja autovalor de A , a Equação (2.13) deve possuir solução \vec{x} não nula e para isso $\det(\lambda I - A) = 0$. \square

Definição 2.9. (Multiplicidade geométrica e algébrica) Se λ_0 for um autovalor de uma matriz A de tamanho $n \times n$, então a dimensão do autoespaço associado a λ_0 é denominada **multiplicidade geométrica** de λ_0 . E, o número de vezes que $\lambda - \lambda_0$ aparece como um fator do polinômio característico de A é denominado **multiplicidade algébrica** de λ_0 .

2.5 Diagonalização

Nosso objetivo nesta seção será encontrar uma base do espaço vetorial na qual a matriz de um determinado operador linear seja a mais simples possível. Por muitos motivos, a melhor situação possível é aquela em que conseguimos uma matriz diagonal associada a um operador.

Dado um operador linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, nosso objetivo é conseguir uma base β de \mathbb{V} na qual a matriz do operador nesta base $\left([T]_{\beta}^{\beta}\right)$, seja uma matriz diagonal, que é a forma mais simples possível de se representar um operador.

Teorema 2.2. *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.*

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso de λ_1, λ_2 e λ_3 distintos.

Suponhamos $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ tal que $T(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$, para $i = 1, 2, 3$.

Tomemos a_i tais que

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 = \vec{0}. \quad (2.14)$$

Aplicando T em ambos os lados da Equação (2.14), obtemos, pela linearidade de T e pela definição de autovetores,

$$a_1 T(\vec{v}_1) + a_2 T(\vec{v}_2) + a_3 T(\vec{v}_3) = T(\vec{0})$$

$$a_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + a_3 \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}. \quad (2.15)$$

Multiplicando a Equação (2.14) por λ_1 , temos

$$a_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + a_2 \lambda_1 \vec{v}_2 + a_3 \lambda_1 \vec{v}_3 = \vec{0}. \quad (2.16)$$

Subtraindo (2.16) de (2.15), temos

$$\begin{aligned} (a_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + a_3 \lambda_3 \vec{v}_3) - (a_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + a_2 \lambda_1 \vec{v}_2 + a_3 \lambda_1 \vec{v}_3) - &= \vec{0} \\ a_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + a_3 \lambda_3 \vec{v}_3 - a_2 \lambda_1 \vec{v}_2 - a_3 \lambda_1 \vec{v}_3 &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{v}_2 + a_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{v}_3 = \vec{0}. \quad (2.17)$$

Aplicando T em (2.17), obtemos

$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) T(\vec{v}_2) + a_3 (\lambda_3 - \lambda_1) T(\vec{v}_3) = T(\vec{0})$$

$$a_2 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{v}_2 + a_3 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{v}_3 = \vec{0}. \quad (2.18)$$

Multiplicando (2.17) por λ_2 , vem:

$$a_2 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{v}_2 + a_3 \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{v}_3 = \vec{0}. \quad (2.19)$$

Subtraindo (2.19) de (2.18), temos

$$\begin{aligned} [a_2 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{v}_2 + a_3 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{v}_3] - [a_2 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{v}_2 + a_3 \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{v}_3] &= \vec{0} \\ a_3 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{v}_3 - a_3 \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{v}_3 &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$a_3 (\lambda_3 - \lambda_2) (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{v}_3 = \vec{0}. \quad (2.20)$$

Como $(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0$, $(\lambda_3 - \lambda_1) \neq 0$ e $\vec{v}_3 \neq 0$, segue que $a_3 = 0$.

Pela Equação (2.17) e substituindo $a_3 = 0$, obtemos

$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{v}_2 = 0.$$

E, como $(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$ e $\vec{v}_2 \neq 0$, segue que $a_2 = 0$.

De forma análoga, substituindo $a_2 = a_3 = 0$ na Equação (2.14), teremos $a_1 = 0$.

Portanto, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ são L.I. □

Lema 2.1. *Se uma matriz A de tamanho $n \times n$, com autovalores complexos diferentes dois a dois, então existe uma base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de \mathbb{C}^n formada por autovetores de A .*

Demonstração. A prova é por indução.

Hipótese de indução em k : $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ são linearmente independentes.

Caso inicial: $k = 1$, sabemos que \vec{u}_1 é diferente de zero. Logo não existe combinação linear não trivial $x_1 \vec{u}_1 = 0$.

Admitindo a hipótese para um certo k , consideramos por absurdo uma combinação linear não trivial nula de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{k+1}$:

$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_k \vec{u}_k + x_{k+1} \vec{u}_{k+1} = \vec{0} \quad (2.21)$$

Por indução, $x_k \neq 0$. Multiplicando a Equação (2.21) por $(\lambda_{k+1}I - A)$, teremos:

$$x_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) \vec{u}_1 + x_2 (\lambda_{k+1} - \lambda_2) \vec{u}_2 + \dots + x_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \vec{u}_k = \vec{0}$$

Como os autovalores são diferentes dois a dois, essa é uma combinação linear não-trivial de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$. Pela hipótese de indução, ela não pode se anular. Isso estabelece a hipótese para o nível $k+1$. \square

Exemplo 2.2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

De acordo com a Proposição 2.2, temos

$$p_T(\lambda) = \det(\lambda I - [T]_{\alpha}^{\alpha}) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda - 3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \right) = 0,$$

então,

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2 \cdot (\lambda + 1) = 0.$$

Assim, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Associando a $\lambda_1 = 3$, temos, pela definição de autovetor,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema linear homogêneo pelo Método de Eliminação de Gauss-Jordan, obteremos $x_3 = 0$.

E, como x_1 e x_2 são variáveis livres, atribuiremos os parâmetros s e t , respectivamente.

Logo, obtemos dois autovetores L.I.,

$$(s, t, 0) = s(1, 0, 0) + t(0, 1, 0)$$

$$v_1 = (1, 0, 0) \text{ e } v_2 = (0, 1, 0).$$

De modo análogo, associando $\lambda_2 = -1$, teremos

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E, x_3 é uma variável livre, então atribuiremos o parâmetro p .

Logo,

$$x_3 = p \implies \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{5}{4}x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_3 = p \\ x_2 = -\frac{5}{4}x_3 = -\frac{5}{4}p \end{cases}$$

Assim, temos um autovetor L.I., dado por $u = \left(1, -\frac{5}{4}, 1\right)$.

Então $\beta = \{v_1, v_2, u\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 constituída de autovetores de T e

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

É claro que a matriz diagonal $[T]_{\beta}^{\beta}$ obtida pelo exemplo anterior não foi por acaso.

Dada uma transformação linear qualquer $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, se conseguirmos uma base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formada por autovetores de T , então,

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \end{aligned}$$

a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i , isto é,

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Definição 2.10. Seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ um operador linear. Dizemos que T é um *operador diagonalizável* se existe uma base de \mathbb{V} cujos elementos são autovetores de T .

O operador do Exemplo 2.2 é diagonalizável. Vamos dar a seguir um exemplo de um operador não diagonalizável.

Exemplo 2.3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, pela Proposição 2.2, temos

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 3)^2 \cdot (\lambda + 1) = 0.$$

E, dessa forma, os autovalores são, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Associando $\lambda_1 = 3$, pela definição de autovetor, teremos o sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como x_1 é uma variável livre, atribuiremos o parâmetro s . Assim, $x_1 = s$ e então

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{e}$$

Logo, teremos um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$ sendo dado por $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

De modo análogo, para $\lambda_2 = -1$ teremos um autovetor associado ao autovalor, sendo $\vec{u} = \left(\frac{1}{16}, -\frac{5}{4}, 1\right)$.

Neste caso, temos apenas dois autovetores L.I. para T , e portanto não existe uma base de \mathbb{R}^3 constituída só de autovetores. Isto significa que em nenhuma base a matriz de T é uma matriz diagonal, ou seja, T não é diagonalizável.

2.5.1 Procedimento para diagonalizar uma matriz

Passo 1. Confirme que a matriz é realmente diagonalizável encontrando n autovetores linearmente independentes. Uma maneira de fazer isso é encontrar uma base de cada autoespaço e juntar todos esses vetores num único conjunto S . Se esse conjunto tiver menos do que n elementos, a matriz não é diagonalizável.

Passo 2. Forme a matriz $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ que tem os vetores de S como vetores coluna.

Passo 3. A matriz $P^{-1}AP$ será diagonal com os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ correspondentes aos autovetores p_1, p_2, \dots, p_n como entradas diagonais sucessivas.

Capítulo 3

Operadores Semissimples

Neste capítulo utilizamos a referência [12].

Os operadores lineares semissimples são utilizados quando encontramos autovalores complexos durante o processo de diagonalização de um operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A ideia é ampliar o domínio de T para \mathbb{C}^n e procurar diagonalizar esse novo operador, denotado por $T^{\mathbb{C}}$ e chamado *complexificado de T* . Se $T^{\mathbb{C}}$ for diagonalizável, então T poderá ser escrito não em forma diagonal, mas em uma outra forma também bastante útil e simples.

3.1 O Complexificado de um operador

Quando estudamos a disciplina de Álgebra Linear, vimos que uma T.L. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diagonalizável, se, e somente se, todas as raízes do polinômio característico de T forem reais e as respectivas multiplicidades geométrica e algébrica são iguais. Se estivermos trabalhando com um operador linear complexo, $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, os conceitos de autovalor e autovetor se transportam.

Um número complexo λ é dito *autovalor* de T se existir um vetor não nulo $w \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$T(w) = \lambda.w. \quad (3.1)$$

De modo análogo ao caso real, definimos o polinômio característico de T como

$$p_T(\lambda) = \det(\lambda I - [T]_B) \quad (3.2)$$

onde B é uma base qualquer em \mathbb{C}^n .

Consideremos agora o caso em que temos um operador

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tal que o polinômio característico $p_T(\lambda)$ de T possui raízes complexas. Ele não será, portanto, diagonalizável; mas podemos imaginar o operador T como um operador de \mathbb{C}^n , e podemos nos perguntar se o operador (sobre \mathbb{C}) será diagonalizável. Em caso afirmativo, será que isso não nos permitirá obter alguma representação matricial de T (real) que seja útil?

Consideremos um operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se fixarmos uma base (por exemplo, a base canônica Can), T pode ser escrito pela matriz associada

$$[T]_{Can} = (a_{ij}).$$

$$\begin{aligned} T(\vec{w}) &= r\vec{w}; \\ T(\vec{u}) &= a\vec{u} + b\vec{v}; \\ T(\vec{v}) &= -b\vec{u} + a\vec{v}. \end{aligned}$$

$$\text{A matriz de } [T]_B = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Como T é um operador linear semissimples, então T^C é diagonalizável. Assim, existe uma base B' de autovetores de \mathbb{C}^3 tal que a matriz de T em relação à base B' é diagonal.

Seja \vec{w} o autovetor de T^C associado ao autovalor real r . É fácil ver que $\vec{w} = \vec{w}_1 + i\vec{w}_2$ onde $\vec{w}_2 = 0$ e $\vec{w} = \vec{w}_1$. Logo, $T(\vec{w}) = T^C(\vec{w}) = r\vec{w}$.

Seja $\varphi = \vec{u}' + i\vec{v}'$, com $\vec{u}', \vec{v}' \in \mathbb{R}^3$ um autovetor associado ao autovalor complexo $\mu = a + bi$ ($b \neq 0$).

Temos, de acordo com a Definição 2.7,

$$\begin{aligned} T^C(\varphi) &= \mu\varphi; \\ T^C(\vec{u}' + i\vec{v}') &= (a + bi) \cdot (\vec{u}' + i\vec{v}'); \\ T^C(\vec{u}') + i.T^C(\vec{v}') &= (a\vec{u}' - b\vec{v}') + i.(b\vec{u}' + a\vec{v}'). \end{aligned}$$

E, pela igualdade de complexo,

$$\begin{cases} T^C(\vec{u}') &= a\vec{u}' - b\vec{v}'; \\ T^C(\vec{v}') &= b\vec{u}' + a\vec{v}'. \end{cases}$$

Como \vec{u}' e \vec{v}' são vetores em \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{cases} T(\vec{u}') &= a\vec{u}' - b\vec{v}'; \\ T(\vec{v}') &= b\vec{u}' + a\vec{v}'. \end{cases}$$

Tomando-se $\vec{u} = \vec{u}'$ e $\vec{v} = -\vec{v}'$ obtemos a seguinte relação entre os vetores:

$$\begin{cases} T(\vec{u}) &= a\vec{u} + b\vec{v}; \\ T(\vec{v}) &= -b\vec{u} + a\vec{v}. \end{cases}$$

Basta, agora, mostrarmos que o conjunto $B = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente independente. Para isso, inicialmente mostraremos que os vetores \vec{u} e \vec{v} são L.I. Lembre-se que como $\varphi = \vec{u}' + i\vec{v}'$ é um autovetor associado ao autovalor $\mu = a + bi$, $b \neq 0$, teremos que $\varphi \neq \vec{0}$. Assim, ao menos uma das componente \vec{u}' ou \vec{v}' é diferente do vetor nulo. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\vec{v}' \neq 0$. Mostremos que a equação

$$\alpha\vec{u}' + \beta\vec{v}' = 0, \tag{3.7}$$

só admite a solução trivial $\alpha = \beta = 0$.

De fato, temos:

$$\begin{aligned}
 T(\alpha \vec{u}' + \beta \vec{v}') &= T(\vec{0}) \\
 \alpha T(\vec{u}') + \beta T(\vec{v}') &= 0 \\
 \alpha(a \vec{u}' - b \vec{v}') + \beta(b \vec{u}' + a \vec{v}') &= 0 \\
 \alpha a \vec{u}' - \alpha b \vec{v}' + \beta b \vec{u}' + \beta a \vec{v}' &= 0 \\
 a(\alpha \vec{u}' + \beta \vec{v}') + b(\beta \vec{u}' - \alpha \vec{v}') &= 0.
 \end{aligned}$$

Por (3.7) temos $b(\beta \vec{u}' - \alpha \vec{v}') = 0$, $b \neq 0$, e obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha \vec{u}' + \beta \vec{v}' = 0; \\ \beta \vec{u}' - \alpha \vec{v}' = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por $(-\alpha)$ e a primeira equação por β e somando as equações, encontraremos

$$\begin{cases} \alpha\beta \vec{u}' + \beta^2 \vec{v}' = 0 \\ -\alpha\beta \vec{u}' + \alpha^2 \vec{v}' = 0 \end{cases} \implies (\alpha^2 + \beta^2) \vec{v}' = 0.$$

E, como supomos que $\vec{v}' \neq \vec{0}$, devemos ter $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \iff \alpha = \beta = 0$. De forma análoga, supondo $\vec{u}' \neq 0$, obteremos $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Assim, o conjunto de vetores $\{\vec{u}', \vec{v}'\}$ é linearmente independente. E por definição de \vec{u} e \vec{v} , concluímos que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ também é linearmente independente.

Finalmente, vamos provar que o conjunto B é L.I.

Temos que

$$\alpha \vec{w} + \beta \vec{u} + \gamma \vec{v} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 T(\alpha \vec{w} + \beta \vec{u} + \gamma \vec{v}) &= T(\vec{0}) \\
 \alpha T(\vec{w}) + \beta T(\vec{u}) + \gamma T(\vec{v}) &= 0 \\
 \alpha r \vec{w} + \beta(a \vec{u} + b \vec{v}) + \gamma(-b \vec{u} + a \vec{v}) &= 0 \\
 \alpha r \vec{w} + \beta a \vec{u} + \beta b \vec{v} - \gamma b \vec{u} + \gamma a \vec{v} &= 0 \\
 (\alpha r) \vec{w} + (\beta a - \gamma b) \vec{u} + (\beta b + \gamma a) \vec{v} &= 0.
 \end{aligned}$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha \vec{w} + \beta \vec{u} + \gamma \vec{v} = 0; \\ (\alpha r) \vec{w} + (\beta a - \gamma b) \vec{u} + (\beta b + \gamma a) \vec{v} = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $(-r)$ e somando as duas equações, obtemos:

$$\begin{cases} -\alpha r \vec{w} - r\beta \vec{u} - r\gamma \vec{v} = 0 \\ \alpha r \vec{w} + (\beta a - \gamma b) \vec{u} + (\beta b + \gamma a) \vec{v} = 0 \end{cases} \implies (\beta a - \gamma b - r\beta) \vec{u} + (\beta b + \gamma a - r\gamma) \vec{v} = 0.$$

E como $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.I., concluímos que:

$$\begin{cases} (a - r)\beta - b\gamma = 0; \\ b\beta + (a - r)\gamma = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por $(a - r)$ e a segunda equação por b , e somando as equações obteremos:

$$\begin{cases} (a - r)^2 \beta - b(a - r) \gamma = 0 \\ b^2 \beta + b(a - r) \gamma = 0 \end{cases} \implies (a - r)^2 + b^2 = 0.$$

Como $b \neq 0$, temos que $(a - r)^2 + b^2 \neq 0$. Assim, o sistema (3.8) só admite a solução trivial $\beta = 0$, $\gamma = 0$, e por sua vez, $\alpha = 0$.

Portanto, o conjunto de vetores $B = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente independente e é uma base para o \mathbb{R}^3 . \square

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, faremos alguns exemplos de aplicações da teoria dos números complexos e dos operadores semissimples.

Exemplo 4.1. Calcular as raízes quadradas de $z = 15 + 8i$.

Solução: Indicando uma raiz quadrada de $15 + 8i$ por $x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$(x + yi)^2 = 15 + 8i \implies x^2 + 2xyi - y^2 = 15 + 8i \implies (x^2 - y^2) + 2xyi = 15 + 8i.$$

Assim,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 & (I) \\ 2xy = 8 & (II) \end{cases}$$

Isolando x em (II), temos $x = \frac{4}{y}$. Substituindo em (I), obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{y}\right)^2 - y^2 &= 15 \\ \frac{16}{y^2} - y^2 &= 15 \\ y^4 + 15y^2 - 16 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação biquadrada, fazendo $w = y^2$, encontramos $w_1 = 1$ e $w_2 = -16$.

Assim,

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 \implies y = \pm 1 \\ y^2 &= -16 \quad (\text{não convém, pois } y \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Logo,

- se $y = 1$, então $x = \frac{4}{1} = 4$;
- se $y = -1$, então $x = \frac{4}{-1} = -4$.

Portanto, as raízes quadradas de $15 + 8i$ são $4 + i$ e $-4 - i$.

Exemplo 4.2. Representar no plano de Argand-Gauss o subconjunto de \mathbb{C} dado por $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 3\}$.

Solução: Fazendo $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} |x + yi| &\leq 3 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &\leq 3 \\ x^2 + y^2 &\leq 9. \end{aligned}$$

Esta equação representa um círculo com centro na origem e raio igual a 3.

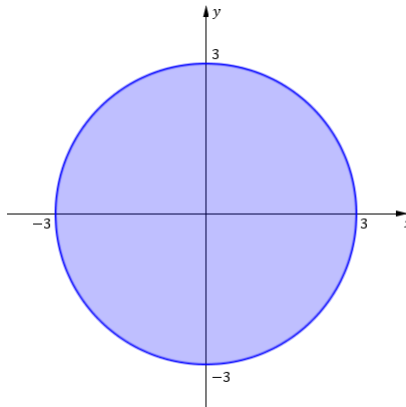


Figura 4.1: Representação geométrica de $|z| \leq 3$

Exemplo 4.3. Descreva geometricamente o conjunto de todos os números complexos z tais que

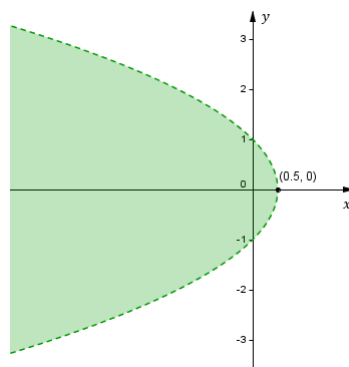
$$|z| < 1 - \operatorname{Re}(z),$$

onde $\operatorname{Re}(z)$ denota a parte real de z .

Solução: Tomemos $z = x + yi$. Temos,

$$\begin{aligned} |z| &< 1 - \operatorname{Re}(z) \\ \implies \sqrt{x^2 + y^2} &< 1 - x \\ x^2 + y^2 &< (1 - x)^2 \\ y^2 &< 1 - 2x \\ x &< \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

Veja a Figura 4.2.


 Figura 4.2: Representação geométrica de $|z| < 1 - \operatorname{Re}(z)$

Se $z = x + yi$, a parábola $2x = 1 - y^2$ divide o plano complexo em duas componentes. A solução é a componente que contém $z = 0$, incluindo a parábola.

Exemplo 4.4. Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_{Can} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

- Mostre que T é um operador semissimples.
- Exiba uma base B do \mathbb{R}^3 onde $[T]_B$ esteja na forma semissimples.

Solução:

Item a). Para que $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja um operador semissimples, o polinômio característico deve ser escrito na forma $p_T(\lambda) = (\lambda - r) \cdot (\lambda - \mu) \cdot (\lambda - \bar{\mu})$ onde $\mu = a + bi$, $r, a, b \in \mathbb{R}$, ou seja, devemos encontrar os autovalores de $[T]_{Can}$, aos quais devem ser distintos. Assim, como

$$(\lambda I - [T]_{Can}) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -15 \\ -1 & \lambda & 17 \\ 0 & -1 & \lambda - 7 \end{bmatrix}$$

temos, pela Proposição 2.2,

$$\det(\lambda I - [T]_{Can}) = 0.$$

Calculando $\det(\lambda I - [T]_{Can})$ obtemos o polinômio característico $p_T(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 17\lambda - 15$.

Por inspeção, encontramos

$$\lambda_1 = r = 3 \quad , \quad \lambda_2 = \mu = 2 + i \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \bar{\mu} = 2 - i.$$

Portanto suas raízes são distintas, então o complexificado $T^C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um operador diagonalizável e pela Definição 3.1, T é um operador semissimples.

Item b). Para encontrarmos a base $B = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\}$ de \mathbb{R}^3 devemos encontrar os autovetores associados aos autovalores, tal que

$$T(\vec{w}) = 3\vec{w} \quad , \quad T(\vec{u}) = (2 + i)\vec{u} \quad , \quad T(\vec{v}) = (2 - i)\vec{v}.$$

Assim, pela Definição 2.8, temos:

- $r = 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -15 \\ -1 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & 3-7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 3 & 0 & -15 \\ -1 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema linear homogêneo pelo Método de Eliminação de Gauss-Jordan, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -15 \\ -1 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{matrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(2)} = \frac{1}{3} \cdot L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} \end{matrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} = L_1^{(2)} + L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)} \end{matrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(4)} = L_1^{(3)} \\ L_2^{(4)} = \frac{1}{3} \cdot L_2^{(3)} \\ L_3^{(4)} = L_3^{(3)} \end{matrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(5)} = L_1^{(4)} \\ L_2^{(5)} = L_2^{(4)} \\ L_3^{(5)} = L_2^{(4)} + L_3^{(4)} \end{matrix} \end{aligned}$$

Obtendo, assim, o seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

E, como x_1 e x_2 são variáveis líderes, atribuiremos um parâmetro à variável x_3 . À saber, $x_3 = s$. Logo,

$$\begin{aligned} x_1 &= 5s \\ x_2 &= -4s \end{aligned} \implies (5s, -4s, s) = s(5, -4, 1).$$

De forma análoga para μ e $\bar{\mu}$, obtemos os seguintes sistemas lineares homogêneos:

- $\mu = 2 + i$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2+i & 0 & -15 \\ -1 & 2+i & 17 \\ 0 & -1 & -5+i \end{bmatrix} &\sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6+3i \\ 0 & 1 & 5-i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 + (-6+3i)x_3 = 0 \\ x_2 + (5-i)x_3 = 0. \end{cases} \\ \xrightarrow{x_3=t} \begin{cases} x_1 = (6-3i)t \\ x_2 = (-5+i)t \end{cases} &\implies [(6-3i)t, (-5+i)t, t] = t \cdot (6-3i, -5+i, 1). \end{aligned}$$

- $\bar{\mu} = 2 - i$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2-i & 0 & -15 \\ -1 & 2-i & 17 \\ 0 & -1 & -5-i \end{bmatrix} &\sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6-3i \\ 0 & 1 & 5+i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 + (-6-3i)x_3 = 0 \\ x_2 + (5+i)x_3 = 0. \end{cases} \\ \xrightarrow{x_3=p} \begin{cases} x_1 = (6+3i)p \\ x_2 = (-5-i)p \end{cases} &\implies [(6+3i)p, (-5-i)p, p] = p \cdot (6+3i, -5-i, 1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\vec{w} &= (5, -4, 1); \\ \vec{u} &= (6 - 3i, -5 + i, 1) = (6, -5, 1) + i(-3, 1, 0); \\ \vec{v} &= (6 + 3i, -5 - i, 1) = (6, -5, 1) - i(-3, 1, 0).\end{aligned}$$

Onde temos a base $B = \{(5, -4, 1), (6, -5, 1), (-3, 1, 0)\}$ do \mathbb{R}^3 .

Nessa base temos:

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$p_T(\lambda) = \det(\lambda I - [T]_{Can}) = \det(\lambda I - [T]_B) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 17\lambda - 15.$$

Exemplo 4.5. Consideremos agora o operador $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ cuja matriz na base canônica do \mathbb{R}^5 é:

$$[T]_{Can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$, verifique!, e suas raízes são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$ e $\lambda_3 = 1 - i$, com

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - (1 + i))^2(\lambda - (1 - i))^2.$$

Dessa forma a multiplicidade algébrica de λ_2 e de λ_3 é 2. Vamos verificar se o complexificado $T^C : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$ é um operador diagonalizável.

Assim,

- para $\lambda_1 = 1$ temos o sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e usando o Método de Gauss-Jordan,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

x_5 será uma variável livre, sendo atribuído o parâmetro s , obtendo o autovetor $\vec{w} = [s(1, 1, 0, 0, 1)]$.

De modo análogo, teremos os autovetores $\vec{u} = [s(0, 1, 1 + i, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1, i)]$ para o autovalor λ_2 e $\vec{v} = [p(0, 1, 1 - i, 0, 0) + q(0, 0, 0, 1, -i)]$ para λ_3 .

Concluimos assim, que a multiplicidade geométrica de λ_2 e de λ_3 é 2 e portanto T^C é diagonalizável, e então T é semissimples.

Assim, sendo $B = \{\vec{w}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ uma base do \mathbb{R}^5 , temos

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= (1, 1, 0, 0, 1) \\
\vec{u} &= (0, 1, 1 + i, 0, 0) = \underbrace{(0, 1, 1, 0, 0)}_{\vec{u}_1} + i \underbrace{(0, 0, 1, 0, 0)}_{\vec{u}_2} \\
\vec{v} &= (0, 0, 0, 1, i) = \underbrace{(0, 0, 0, 1, 0)}_{\vec{v}_1} + i \underbrace{(0, 0, 0, 0, 1)}_{\vec{v}_2}.
\end{aligned}$$

Onde temos a base $B = \{(1, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

Na forma semissimples temos,

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerações Finais

O objetivo principal desse trabalho foi o uso dos números complexos em Álgebra Linear, no qual definimos os espaços vetoriais complexos, transformações lineares, bases e autovalores e autovetores complexos. O uso dos operadores semissimples foi algo motivador nessa proposta por ser um conteúdo não abordado na graduação do curso de Licenciatura em Matemática do IFSP *Campus* Birigui. Procuramos realizar as demonstrações da forma mais clara possível, mas com o rigor exigido pela linguagem matemática. Apesar de entendermos que demonstrações áridas e com linguagem técnica excessiva podem afastar o aluno iniciante, ressaltamos a importância do estudo abstrato da matemática, pois o mesmo se faz necessário para enriquecimento do próprio conhecimento. Fizemos uma revisão de tópicos prévios dos números complexos, pois esta seria a base no estudo dos operadores semissimples. Acreditamos que este trabalho possa contribuir para a formação de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, bem como ser uma proposta para a continuidade dos estudos em nível de pós graduação.

Referências Bibliográficas

- [1] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Ed. da Unicamp, 2004. 844 p.
- [2] FEITOSA, L. F. *Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana*. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT), Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2013.
- [3] SÃO PAULO, Secretaria do Estado da Educação, Caderno do Professor: Matemática. vol. 1. 3. série. 2014-2017. p. 61.
- [4] OLIVEIRA, S. B. de. *Números complexos e Geometria*. 76 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual de Campina Grande, Campina Grande - PB, 2014.
- [5] BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Matemática*. vol. 3. São Paulo: Moderna, 1989. 288 p.
- [6] CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. Tradução: Tadao Yoshioka. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Ed. da Universidade de São Paulo, 1975. 276 p.
- [7] IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar*. vol. 6. 6. ed. rev. e ampl. São Paulo: Atual, 1993. 241 p.
- [8] MONTEIRO, L. H. J. *Elementos da Álgebra*. Rio de Janeiro (IMPA): Ed. Ao Livro Técnico S.A., 1969. 552 p.
- [9] SERRÃO, A. N. *Exercícios e Problemas de Álgebra*. vol. III. Rio de Janeiro: Ed. Ao Livro Técnico S.A., 1968. 238 p.
- [10] ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com aplicações*. Tradução técnica: Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Ed. Bookman, 2012. 768 p.
- [11] BIEZUNER, Rodney Josué. *Notas de Aula - Álgebra Linear I*. 91 f. Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas (ICEX), Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais - MG, 2008.
- [12] MARTIN, P. A.; SINGER, M. L. *Tópicos de Álgebra Linear*. Apostila: POLI-2007, p. 5-22.